

北海道大学大学院環境科学院  
地球圏科学専攻  
大気海洋物理学・気候力学コース

令和5年度大学院修士課程秋季特別入試  
基礎学力試験

数学・物理学(古典物理学)より計2問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和4年11月

## 問題 1

問 1 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  について、以下の問に答えよ。

- (a)  $A$  の固有値および固有ベクトルを求めよ。
- (b)  $P^{-1}AP$  を対角行列にできる正則行列  $P$  およびその逆行列  $P^{-1}$  を求めよ。

問 2 次の不定積分を求めよ。

$$\int 9xe^{-3x} dx$$

問 3 直交直線座標系  $(x, y, z)$  におけるスカラー関数  $\phi = \sin x e^y \log z$  とベクトル関数  $\mathbf{a} = (xy, yz, zx)$  に関して、以下を求めよ。

- (a)  $\nabla\phi$
- (b)  $\nabla \cdot \mathbf{a}$
- (c)  $\nabla \times \mathbf{a}$

問 4 以下の微分方程式を解け。

(a)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = -30$

(b)  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y + 15}{x + 7} \quad (x + 7 > 0)$

## 問題 2

問 1 表面に摩擦のある薄い板の上に、密度が一様で、質量  $m$ 、断面の半径  $r$  の円筒が図 1 のように静止している。次に、円筒の下にある薄い板を円筒が滑らないように  $x$  軸の正の方向に加速度  $a_0$  で引き抜く。円筒の中心まわりの慣性モーメント  $I_c$  は、 $I_c = \frac{1}{2}mr^2$  である。円筒と薄い板の接点 P にかかる摩擦力  $f$  について、以下の問に答えよ。

- (a) 円筒に働く摩擦力  $f$  の向きは、 $x$  軸の正の方向か、負の方向かを答えよ。
- (b) 円筒の中心における  $x$  軸方向の加速度を  $a$  とするとき、円筒の並進運動に関する運動方程式を書け。
- (c) 円筒の中心まわりの角加速度を  $\alpha$  とするとき、円筒の回転運動に関する運動方程式を書け。
- (d) 点 P における  $f$  の大きさを求めよ。

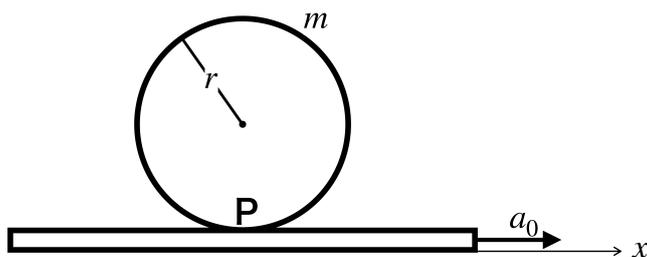


図 1:

問 2 気温 300 K の空気中で、1 mol の理想気体を袋に入れ、湖に沈める。ただし、地表面での大気圧を  $1000 \text{ hPa} = 10^5 \text{ N/m}^2$ 、水の密度を  $1000 \text{ kg/m}^3$ 、重力加速度の大きさを  $10 \text{ m/s}^2$ 、気体定数を  $8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ 、水温は、水深に関わらず気温と同じ 300 K であり、さらに、袋の容量は  $1000 \text{ hPa}$ 、300 K での 1 mol の理想気体の体積よりも大きいとする。以下の問に有効数字 2 桁で答えよ。

- (a) 袋に入れられたこの気体の体積は、地表面ではいくらか。
- (b) 水深 90 m での圧力はいくらか。なお、大気や水の中の圧力はその上にある空気や水に働く重力により決まるとしてよい。例えば、地表面での大気圧  $10^5 \text{ N/m}^2$  は、底面積  $1 \text{ m}^2$  の気柱（空気の柱）の質量が  $10^4 \text{ kg}$  であることを意味する。
- (c) 気体の入った袋を水深 90 m まで沈めた。袋は熱を良く通し、気体の温度は水温と同じであるとする。気体の体積はいくらになるか。また、この過程で、気体はどれだけの熱を吸収、もしくは、放出したか。ただし、 $\log_e 10 \simeq 2.3$  を用いてもよい。