

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成 29 年度大学院修士課程秋季特別入試
基礎学力試験

数学・物理学(古典物理学)より計2問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成 28 年 10 月

問題 1

問 1 以下の微分方程式を解け。

(a) $\frac{dy}{dx} - 2y = e^x, y(0) = 0$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dx}(0) = 1$

問 2 以下の不定積分を求めよ。

(a) $\int x(1-x)^{\frac{1}{2}} dx$

(b) $\int e^x \cos x dx$

問 3 直交直線座標系 (x, y, z) を考える。以下の問に答えよ。

(a) スカラー関数 $f = \cos(ax) e^{-by} \sqrt{cz}$ について、 $\nabla^2 f$ を求めよ。ただし、 a, b, c は定数とする。

(b) ベクトル関数 $G = (x, z^2, 2yz)$ について、 $\nabla \times G = 0$ を示し、スカラーポテンシャル ($\nabla g = G$ となるスカラー関数 g) を一つ求めよ。

問 4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

問題 2

問 1 図 1 のように、水平面と円弧が地点 A で滑らかに接続された台の上を質量 m の物体が運動している。円弧は O を中心とする円を 4 等分したもので、その半径は R である。また、台は固定され動かない。このとき、以下の (a)~(c) に答えよ。ただし、物体と台の間は滑らかであり、物体の大きさは無視できる。また、重力加速度の大きさを g とする。

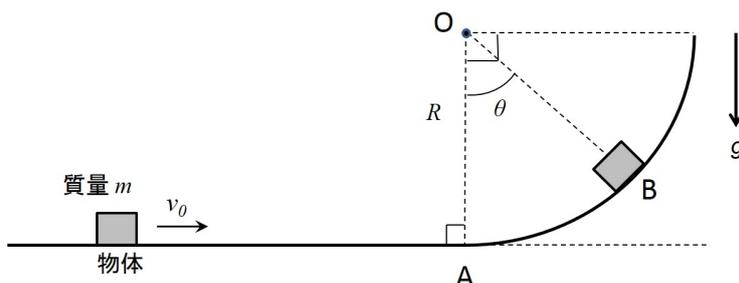


図 1

- (a) 物体が水平面を初速度 v_0 で運動し、円弧を地点 B まで昇ったところで速度が 0 となった。OA と OB のなす角を θ とするとき、初速度 v_0 を R, g, θ で表せ。
- (b) 図 2 のように、速度 v_0 で運動していた質量 m の物体が、水平面上で質量 m_1 の物体 1 と質量 m_2 の物体 2 に分離した (ただし $m = m_1 + m_2$)。物体 2 は物体 1 に対して相対速度 u (< 0) で後方に放出され、物体 1 は水平面上を速度 v_1 で動いた。このとき、 v_1 を m_1, m_2, v_0, u を用いて表せ。

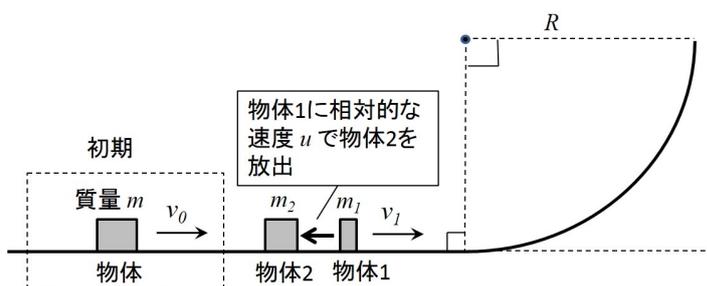


図 2

- (c) 物体 1 は、物体 2 を放出した後に円弧を昇り始めた。物体 1 が円弧を昇りきって空中に放出されるための u の大きさ (すなわち $|u|$) の条件を、 m_1, m_2, R, g, θ を用いて表せ。ただし、初速度 v_0 は (a) で求めたものと同じものとする。

- 問 2 エアコンを用いて室内を冷房することを考える。このエアコンの冷房はカルノーサイクルを逆作動させたサイクルからなっているとみなす。低温熱源を室内の空気、高温熱源を室外の空気とすると、低温熱源から奪い取られる熱量を Q_L 、高温熱源に移される熱量を Q_H 、外部から加えた仕事を W とする。以下の (a)~(d) に答えよ。
- (a) このサイクルについて、熱力学の第 1 法則を考えてエネルギー保存の式を書け。
 - (b) この冷房の効率の指標である成績係数 K_L は、 $K_L = Q_L/W$ と定義される。クラウジウスの等式 $Q_H/T_H = Q_L/T_L$ (ここで、 T_H と T_L は高温熱源と低温熱源の絶対温度 [K]) を用いて、成績係数 K_L を T_H と T_L で表せ。
 - (c) (b) の結果を用いて、外気温が 30°C の日に、この冷房を使って室内を 25°C に保つ場合と、 28°C に保つ場合の成績係数 K_L についてそれぞれ計算し、その比を有効数字 2 桁で答えよ。
 - (d) (c) の 2 つの場合について、同じ熱量を奪い取るために必要となる仕事はどう異なるかという観点から比較せよ。