担当: 久保川 厚
2021 年 05 月 12 日配布

実験の見方・他

1　自転している世界での運動

地球は自転しています。地球は球ですので、回転軸の方向と重力の方向は、極を除くと一致ませんが、ここでは、大気や海洋の流れに及ぶ「回転の効果」を取り出すために、回転台の上の流体（流体というのは、水や空気のような流れるもののことで、ここでは水を用いる）を考えます。丸い地球とは違うように見えるかもしれないけれども、自転しているという点では同じです。

私達は回転する地球上に住んで、大気や海水の流れを見ています。地球の自転は 24 時間で 1 回です。この時点に伴う地表面の移動速度は、例えば、緯度 45 度では、地球の半径を 6400km とすると、(緯度 45 度での地球一回りの距離÷ 24 時間なので) $2\pi \times 6400 \times 10^3$メートル $\times \cos\frac{\pi}{2}/(24 \times 60 \times 60$ 秒$) = 329$m/s なります。他方、我々が感じるちょっと強めの風は、風速 10m/s ぐらいです。ですから、我々の感じる風の強さは、(宇宙から見た時の) 地表の移動速度に比べれば、非常にに小さいということになります。このことは、地球の大気は地球とほぼ一緒に自転しているという事です。海の水も、同様に、地球とほぼ一緒に自転しています。

地球上の大気や海水は地球とほぼ同じ速度で自転し、我々は、その自転速度からのちょっとしたズレを、大気や海洋の流れとして、認識します。このような場合、その力学を理解する上での難しさは、2 つに分けられます。

1. 回転する物体の運動の理解の難しさ
2. 自転している世界から自転している世界の運動を理解することの難しさ

難しさの 1 は、例えば、コマの力学があります。回転しているコマは立っていることができます。これを正しく説明することは、多分、皆さんには難しい。それ以外にも、フィギュアスケートのスピンで、スケーターが腕や足を体の軸に近づけると回転が速くなり、腕を広げ、体の軸から離すと回転が遅くなるという現象があります。こういうのは難しいですが、そんなものだと取り敢えず納得してもらうことにします。我々の見る流体は水槽と一緒に回転しているので、当然、回転するものとして振る舞います。

難しさの 2 は、回転している系から見るとどう見えるかという問題です。自転している系に住んでいるという事は、同じ方向を見ているつもりでも見る方向が時間的に変わるということです。例えばまっすぐ飛んでいるものを回転している系から見ると渦を描くように近づいてきて、その後、渦を描くようにして遠ざかっていく事になります。

回転していると、回転していないときには考えられないようなことが起きえます。まずは、それを楽しむこと。それが第一の目的です。次に、水槽と一緒に回転している人から観るときと宇宙 (静止系) から観るときに、どう違うかを考えます。これは頭の体操です。そして、このようにして（観て・考えることにより)、大気と海洋の大規模なゆっくりとした流れを支配する力学を理解出来ればいいなと思います。まあ、話は全般に難しいので、理由はわからないけれども、こんなことが起きるんだ、と面白がってもらうだけでも構いません。ここでの実験は、後半 (第 2 部、第 3 部) の海洋の流れや大気の流れを楽しむための糧となります。

2　実験の見方・考え方

ここでは、回転水槽実験と車輪や回転椅子を使った実験を行います。後者は通常 (?) の物理の実験です。回転水槽実験は観たことないと思いますので、ここではそれの見方について簡単に書いておきます。

ここで行う水槽実験では、まず、水槽の中の水の回転が、水槽の回転と同じになるのを待ちます。水槽と水の回転が同じになった状態では、水槽内で水槽と一緒に回転している人にとっては、流れがないということになります。これは、地球がすごい速度で自転しているのに、空気が地球と一緒に回転しているときには、我々が無風だと思うのと同じです。水槽は地球を模したものであり、我々は、地球に住んでいるのですから、水槽

内の流れに関しても、**我々**が直接感じるのは、水槽に相対的な流れであるとします。そして、地球同様、その流れは、水槽の回転速度に比べると十分に小さいという事です。

では、その弱い流れをどうやって見るかというと、ここでは、着色水の分布の変化で観察します。色は付けますが、密度はほとんど同じですので、浮いたり沈んだりもしません。流されることによって動きます (分子の振動によって長時間経つと色素は拡散し (分子拡散)、ぼやけていきますが、我々が観察する時間では、それはほぼ無視できます)。もし、水槽の中の水が、水槽と一緒に回転しているだけななら、それが着色水の分布を変えることはありません。これは水槽に住んでいる人 (水槽人と呼びます) にとって流れがなければ、彼らから見て着色水の位置は一切変化しないことを考えれば理解できると思います。着色水の分布の変化は水槽に相対的な流れによってのみ生じます。地球上の空気や海水の流れを理解したいと思っている我々にとって重要なのは、水槽人から見た時の流れです。目が回るかもしれませんが、水槽と一緒に回転しているつもりで、着色水の分布の変化 (水槽に固定された座標系での位置の変化) を追って下さい。この視点を、ここでは、**『回転系の視点』**もしくは**『水槽人の視点』**と呼びます。

我々地球人は、水槽人同様、回転系に住んでいますが、通常我々が目にする現象は、地球自転の影響をほとんど受けていません。それは、我々が知っている多くの現象 (例えば、物の落下とか、振り子とか) の時間スケールが 1 日に比べて十分に短いからです。そのため、我々は、通常、回転系の現象を実感としては知りません。地球自転は、時間スケールが 1 日より長い現象には大きく影響します。中緯度の天気を支配する高気圧や低気圧は数日スケールですから回転 (地球自転) の効果は重要です。ガイダンス (04/14) で述べたように、高気圧性の渦というのは、非回転系 (静止系) ではあり得ない、真ん中の圧力の高い渦です。このような現象をどのようにすれば理解できるかという点に関しては、もし我々が回転していない世界の物理を分かっているならば、回転していない世界から地球、もしくは、回転水槽を眺めれば、理解できるはず、という事になります。これをここでは**『静止系の視点』**、**『非回転系の視点』**もしくは**『宇宙人の視点』**と呼びます。なお、回転していない世界での回転するものの物理についても、もちろん説明します。回転するものの物理は、静止系からら見ても (コマの力学が難しいことから明らかなように) 難しいです。それ故、「何故」の理解より「何が起きるか」を理解してもらい、それを回転水槽内の流体に適用してもらうというふうにします。根本部分が説明できなくても構いません。それぞれの視点でどのようなことが観察されるかが分かれば、そして、それが次の実験を考えるときに活かされれば、十分です。

『水槽人の視点』と**『宇宙人の視点』**を行きつ戻りつしながら、現象に近づいて行ってもらえればと思います。

3 レポート

レポートには授業でやった内容のまとめを書いてください。形式は自由ですが、どのような実験をやったか、どのような結果になったか、それはどのように説明されるか (されると思うか?)、の 3 点は必須、それ以外に、自分の予想や、結果に対する自分の考え、実際の大気や海洋の話、感想、質問など何でも書いてくれれば良いです。なお、実験結果 (何が起きたか) がちゃんと記述されているという事がまず重要です。授業中にしっかり見て下さい。

レポートはその次の週の授業時間に返します。

Enjoy!

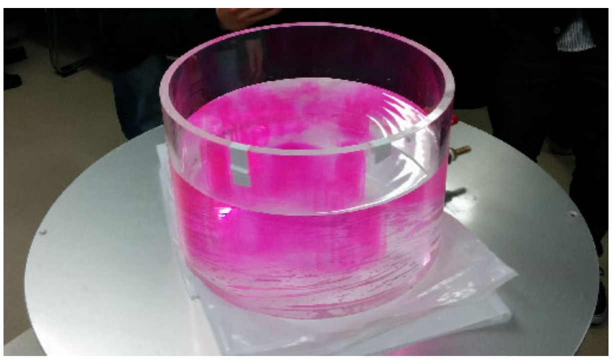
担当: 久保川 厚
2021 年 05 月 19 日配布

1 回転系と非回転系の流れの違い (テーラーのインクの壁)

第 1 回目の実験は、回転しているときと回転していないときで流れの様子が一変する最も顕著な例なので採用しています。

着色水を注射器で注入する前は，水槽の中の水は水槽と一緒に回転しています。すなわち、回転台と一緒に回転している人から見ると水は静止しています。これは、回転しているコマを同じ回転数の台に載って見ると回転していないように見えるのと同じで、水は止まっているように見えても回転しているものの力学に支配されているということになります。回転しているものの性質は、回転軸の方向を変えようとしないという点があります。これの代表例はコマです。ジャイロコンパスというのもあります。飛行機などはジャイロスコープ (コマ) を積んでいて、飛行機の方向が変わってもその回転軸の方向が変わらないことから、飛行経路を一定に保つことができます。回転水槽の中の水も回転軸を持っています。それ故、回転水槽の中の水は、回転軸に平行に立つ (この実験では上下方向の) 柱の集合のようなもになっています。そのため、何らかの方法で流れを作ったときには、その柱が水平に動くような運動になります。

この実験では，注射器で着色水を注入します。注射器で着色水を注入するとその勢いで，水槽の中に (水槽に相対的な) 流れが生じます。その流れによって着色水は移動します。着色水は最初モコモコと分布していますが，その内，着色水の分布はカーテン状になります。これは、着色水を流す (水槽に相対的な=水槽人から見た時の) 流れが水平成分のみであり，その方向と強さが上から下まで同じであることによります。回転している系での流れが回転軸方向に一様になろうとする傾向を持つことは理論的に証明されており、それは「テーラー・プラウドマンの定理」とよばれます。



水槽の中の水と同じ比重のものは下に落ちることも，浮かびあがることもありません。つまり、水槽の中の水は上下を知らない。ですから、水槽が回転していないときには，注射器で着色水を注入すると 3 次元等方的に振る舞います (いろいろな方向にモコモコする)。他方，回転していると回転軸方向に一様になろうとして，流れは 2 次元的 (金太郎飴状態) になります。

また、回転系での現象に関して、上下には広がることが出来ると誤解をする人が屡々いますが、回転水槽の中の水は柱のようになっているので、上下方向の流れはほとんど生じません。カーテン状の着色水の下限は、最初に注射器で勢いよく注入した時に達した深さで基本的には決まっています。

後の実験のためにここで知っておくべきことは、**回転軸に直交する面内 (この場合は水平面) の流速は、回転軸方向 (この場合は鉛直方向) に一様となる**傾向があるという事です。また、回転軸方向の流れはあっても非常に弱いです。

現実の大気や海洋の流れは、水槽の中のように回転軸方向に一様になっているというわけではありません。それは、大気や海洋の流体は、下の方ほど密度大きいという密度成層をなしているからです。密度に分布があると何故テーラー・プラウドマンの定理が成り立たなくなるのかという話もここではしません。現実がどうであるかという事とは別に、水槽の中の流れを考えるためには、この回転軸方向に流れが同じになるというこの性質を知っていることは重要です。

2　地表近くと上空の風の違い、高気圧と低気圧

水や空気 (流体) は，固体に接したところでは，固体にくっつき，固体との相対速度がゼロになります。水槽の中の水は、水槽に相対的な速度を持っているときには、その性質により，水槽の底からの摩擦で減速されます。

摩擦の影響がない場合，回転している水は、遠心力と圧力傾度力 (圧力の高いところから圧力の低い方に働く力) がつり合った状態にあります。この場合の圧力は水の重さなので、水平面 (重力に直行する面) 上で見ると圧力の高いところでは水位が高い。圧力が水位で決まる以上，水平方向の圧力傾度力の大きさは深さによらず、上から下まで同じです。

回転している水槽よりも中の水の回転が速いとき、底から離れたところでは、遠心力と圧力傾度力が釣り合っていますが、底の近くでは、摩擦の影響で、流速が小さくなります。それ故、底の近くでは遠心力よりも内向きの圧力傾度力の方が大きくなり、その力の差に押されるように、底近くには内向きの流れが生じます。カップの紅茶をぐるぐる回すとお茶殻が中心に集まるのと同じです。他方、回転している水槽よりも中の水の回転が遅いとき、底近くでは、回転速度が大きくなるため、遠心力が内向きの圧力傾度力より大きくなります。それ故、底近くでは外向きの流れができます。

要するに、**水槽の回転に比べて、水の回転が速ければ、底近くでは中心向きの流れが、水の回転の方が遅ければ、底近くでは外向きの流れができます。**

これと同じ現象が自転する地球上でも起きています。ただし、この場合、我々は自転する地球上でこの現象を観ることになります。そこで、水槽の中に住んでいる人 (水槽人) が、この現象をどのように見るか考えてみましょう。

回転する水槽に住んでいる水槽人にとって流れがない状態というのは、水槽内の水が水槽と一緒に回転しているときです。水槽人の感じる重力は地球の重力と水槽の回転に伴う遠心力の和です。これはちょうど、水槽に相対的な流れがないときの水面と直交する方向になっています。我々が水平だと思う面は重力と直交する面ですから、水槽人にとっての水平面 (**ジオイド**と呼ばれる) は、水槽に相対的な流れがないの時の水面となります。この時、水槽人にとっては水面の高さは何処でも同じですから、圧力傾度力もゼロということになります (流れがないのでそれと釣り合う圧力傾度力もないということです)。外 (宇宙から) 見たときには水槽の中央の水面は窪んでいたのですが、水槽人にとってはそれが**平ら**という事で、水平面自体も水槽と一緒に回転しているか、外から見ているかによって違ってきます。

水槽内の水が水槽よりも速く回転している状態は、水槽人から見ると、水槽の自転方向の流れがあると感じられます。ここで、地球の北半球と同様、回転方向が反時計回りとすると、反時計回りの流れがあり、そして、中央の圧力が低く、端の圧力が高いと感じられます。これが低気圧性の渦です。水槽内の水が水槽よりも遅く回転している状態は、水槽人から見ると、時計回りの流れがあり、そして、中央の圧力が高く、端の圧力が低いと感じられます。これが高気圧性の渦です。高気圧性の渦というのは、宇宙から見ると回転が遅いところということになります。

摩擦が重要となる底近くの流れを見ると、高気圧性渦の場合は外向き、低気圧性渦の場合は内向きですから、底近くでは、水槽人から見て、圧力の高い方から低い方に流れが生じていることが分かります。この摩擦が重要となる薄い層をエクマン層といいます。

摩擦の効かない高さでの流れと圧力の水平分布の関係を見ると、水槽人から見たとき、(水槽が反時計回りに回転している場合) 流れは圧力の高い方を右に見る方向に流れていることが分かります。 また、その結果、流れは水槽人から見たときの等圧線 (等水位線) に沿うように流れていることになります。実際地球上の時間変化の小さな大規模な流れは、北半球であれば、圧力の高い方を右に見て流れる傾向があります。南半球では逆です。これを地衡流 (地衡風) といいます。

地衡流は、回転系での力 (水槽人が感じる力) であるコリオリ力と回転系での圧力傾度力が釣り合った状態です。コリオリ力は、北半球では、移動する物体に対して、その速度の大きさに比例して、進行方向右向きに働く力です。このコリオリ力と圧力傾度力が釣り合った状態を地衡流平衡といいます。エクマン層では、摩擦の影響で、流れが弱くなり、地衡流平衡が崩れ、圧力傾度力の方向に流体が動くと解釈することができます。

3　コリオリ力・地衡流・ポテンシャル渦度

3.1　コリオリ力

物体の運動は流体も含め，ニュートンの運動方程式に従います。

「質量×加速度は力に等しい」

回転系では，回転系に移ったことにより、遠心力とコリオリ力が生じます。遠心力は，回転軸からの距離と系の回転角速度の二乗の積で、中心から外向きに働きます。これは、水槽でも現実の地球でも、その系の重力の大きさと方向を少し変えます。

コリオリ力は回転系で運動する物体に、系の回転角速度と物体の速度の積に比例する大きさで，その進行方向に対して (系の回転が反時計回りであれば) 直角右向きに働く力です。要するに，右に曲げようとします。常に右に曲げられるので，他の力が働かなければ円運動になります。この円運動の周期は π/(系の回転角速度) であり、これを慣性周期といいます。系の回転が時計回りであれば，コリオリ力は、運動する物体を左に曲げます。

コリオリ力をよりよく理解するために、反時計まわりに回転する円盤上の質点の円盤に相対的な運動を考えましょう。相対速度がゼロの場合、遠心力と中心力が釣り合っていると仮定します (ジオイド上の運動を考える)。もし質点が円盤より速く回転しているとすると、質点に働く遠心力が中心力を上回り、質点は外向き、すなわち右に曲げられます。もし、円盤の回転より遅ければ、中心力が上回るため、内向き、すなわち、やはり右に曲げられます。質点が、回転中心に向かって運動するときには、角運動量の保存、$r^2\Omega =$ 一定、から、r (回転中心からの距離) が減少するため、角速度、Ω、が増大、すなわち、進行方向に対して右に曲げられます。もし、運動が外向きなら、Ω が減少し、やはり、右に曲げられることになります。この、進行方向に対して直角右向きに運動方向を変えようとする力が、コリオリ力です。

なお、第 2 回の水槽実験では、水槽の回転速度を変え、回転速度を変えても底から離れたところでの回転速度は変わらないので、「遠心力」と圧力傾度力の釣り合いが維持され、水槽の底近くでは、「遠心力」が変化して圧力傾度力との釣り合いが崩れるという言い方をしましたが、回転系での遠心力は、この場合、水槽と一緒に回転する座標系 (水槽人が止まっていると思う世界) で考えるので、水槽の回転によるものを遠心力と言います。ですから、上の方のそれと異なる流れの「遠心力」は正しくは「水槽の回転による遠心力＋コリオリ力」です。ちょっとややこしいですが、第 2 回目の実験で、水槽人から見た時の圧力傾度力と釣り合っているのは、コリオリ力という事になります。

3.2　地衡流

水平方向に圧力が分布している場合，圧力の高い方から低い方に力が働き、流体をそちら方向に加速しようとします。この力を圧力傾度力と言います。この圧力傾度力とコリオリ力がつり合った流れを地衡流といいます。北半球では，圧力の高い方を右に見て流れます。

初期に圧力の高いところがあったとします。そうすると、圧力傾度力の方向に流体は加速されて動き始めます。流体が運動を始めるとコリオリ力が働き、流れは (北半球では) 右に曲がり始めます。右に曲がると、その内、流れは等圧線に沿うようになります。その時、圧力傾度力とコリオリ力の向きが反対になり、両者はつり合います。このようにして、最初地衡流平衡していなくても、慣性周期程度の時間が経つと両者はつり合い、地衡流になります。
(ポテンシャル渦度に関しては、次回配布)

3.3 ポテンシャル渦度 (渦位)

フィギュアスケーターが回転しつつ、腕を体に近づけると回転が速くなります。これは角運動量の保存、$r^2\Omega=$ 一定、から説明できます。流体にも同じ性質があり、流体は縦に縮んで横に広がれば，フィギュアスケーターが腕を広げたときと同様に回転は遅くなり，縦に延びたときには腕を体に近付けたときと同様に回転が速くなります。流体の場合は，回転を表すのは渦度であり，渦度が変化するときに、保存するのがポテンシャル渦度 (渦位) です。ポテンシャル渦度は、

$$q=\frac{f+\zeta}{h} \tag{3.1}$$

ここで、f は惑星渦度 (コリオリパラメータ) ＝回転系の回転角速度の 2 倍)、ζ は相対渦度＝回転系で見たときの流体の回転角速度の 2 倍、h は流体の厚さ。$f+\zeta$ は宇宙から見た時の流体の渦度で、絶対渦度と呼ばれます。

初期に水深 H_0 のところに $\zeta=0$ の流体があったとすると、その流体のポテンシャル渦度 q は f/H_0 で、それが水深 h のところに流されて行ったとすると ((3.1) より、$(f+\zeta)/h=f/H_0$) なので)、

$$\zeta=f\left(\frac{h}{H_0}-1\right) \tag{3.2}$$

の相対渦度が生じることになります。すなわち、流体柱が伸れば、f と同じ方向の回転 (低気圧性回転) が、縮めば f と逆の回転 (高気圧性回転) が生じます。

渦度

渦度を持つ流体は、個々の流体を見ると回転していますが，必ずしも、全体として回転的になるわけではありません。図 3 − 1 に示すように流れがまっすぐであっても、流れと直交する方向に速さが変化している流れ (シア流と言います) では、流体の部分 (図中の「顔」) を考えると回転します (車輪が回転することにより車が水平に動くのと同じ原理です)。この回転するというのが渦度があるということで、この流れでは「顔」は時計周りですので、負の渦度を持つと言います。

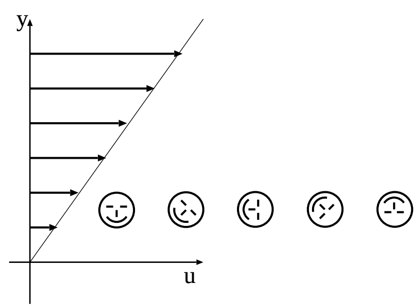


図 3-1: シア流によって流される顔。顔の回転は顔の大きさには依らない

また、流れが回転的であっても、「顔」が回転しなという事もあります。図 3 − 2 の流れは、中心からの距離 1 まで（$\sqrt{x^2+y^2}<1$）では、中心から離れるに従って流れが強くなる形で回転していますが、その外では中心から離れるに従って流れが徐々に弱くなる構造をしています。実は、この流れでは、$\sqrt{x^2+y^2}<1$ では、「顔」は回転しますが、$\sqrt{x^2+y^2}>1$ では、水の軌道は原点の周りの円運動するものの、外ほど流れが弱いため、「顔」は回転しません。要するに、$\sqrt{x^2+y^2}>1$ では、渦度がゼロということになります。

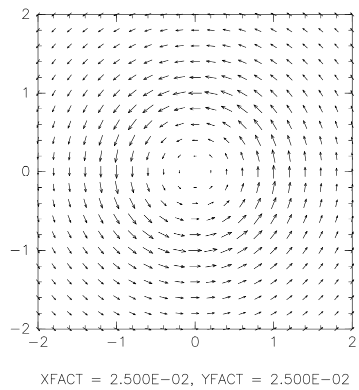


図 3-2: $\sqrt{x^2+y^2}<1$ に正の渦度があり、その外側の渦度はゼロの流れ

渦度のある流れが渦のようになるか、シア流になるかは、周りの条件により決まります。ただし，通常、正の渦度を持つ場合には流れは左に曲がり，負の渦度を持つ場合には右に曲がる傾向があります。

このポテンシャル渦度の保存は、大気海洋の大規模な流れのメカニズムを理解する上で最も重要なものです。強い渦の生成や高気圧や低気圧の形成、海流の分布などを理解するときに必要になります。

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

回転している水槽から水を抜く実験 (05/26)

この実験では、水を抜くことにより、流体の厚さが減り, 横に広がることが重要でした。

第 1 回目の実験 (と第 2 回目の実験) の結果から、底近くや側壁近くの摩擦が重要となる場所を除いて、回転水槽内での水の水平方向の動きは、鉛直 (回転軸) 方向には、深さによらず一様であることを知りました。水が鉛直一様にしか水平に動けない時、側壁から離れた水は、水を抜いたら、どうなるでしょうか。この時水位は下がるわけですから、体積を保存するように、全体として水位が下がった分だけ横に広がるしかありません。そして鉛直一様に水平方向に広がった水は最終的にどうなるかというと、摩擦が効いて、テーラー・プラウドマンの定理が成り立たない側壁近くの層に吸い込まれるしかないという結論になります。

図 3-3: 水を抜く実験の結果

なお、ポテンシャル渦度の保存式からは、水深が浅くなると半時計回りの流れがどんどん強くなりそうですが、エクマン層があることにより、ある一定の回転に落ち着きます。水位が下がり、高気圧性の循環が強くなると、第 2 回目の実験で見たように、エクマン層内での水槽の中心から外に向かう流れが強くなります (こ

れは高気圧性の流れの強さに比例する)。そうするとそれを補うようにエクマン層の上の水がエクマン層に吸い込まれる。高気圧性の流れがどんどん強くなると、エクマン層に吸い込まれる水の量も増え、その内、それによる下降流と水を抜くことによる水面の降下速度が一致するようになります。これらが一致すると水柱は縦に縮まなくなるので、それ以上、渦度は変化しなくなります。この段階では、水はすべてエクマン層を経由して抜けることになります。ちなみにこの水槽のエクマン層の厚さは 1mm 程度です。

回転している水槽から水を抜く実験と地球の大気海洋

地球の大気や海洋には水を抜く蛇口はありません。海洋には水面は有りますが、一様に水面が降下することはありません。水面が降下するというのは、上の方に下降流 (下向きの流れ) が有ることに対応します。大気だと、例えば、夏になると太平洋高気圧が強まりますが、この亜熱帯の高気圧は、基本的には、熱帯での上昇流の下降域に当たります。その領域では上空に下向きの流れが出来、その下の空気が横に広がり縦に縮み、高気圧性の回転 (地球自転と逆の回転) を始めます。海洋でも、風の影響で海面のすぐ下に鉛直流が出来て、海洋の循環を駆動します。

ーーーーーー

補足：水槽の底、中央から水を抜くと何が起きるか。

(興味のない人は読まなくていいですし、わからなくてもいいいです。)

水を水槽の底から抜いたらどうなるかというのはよく有る質問です。水槽の半径を R とし、水槽の中央の半径 a の領域で水を、単位時間に Q だけ抜くとします。その時、水面の降下に伴う速度の鉛直成分 w_η は $w_\eta = -\dfrac{Q}{\pi R^2}$ となります。他方、中央の半径 a の領域での底での水を抜くことによる速度の鉛直成分 w_b は $w_b = -\dfrac{Q}{\pi a^2}$ です。水を抜いている領域では、水の厚さ h は伸ばされ続けることになりますので、その変化は、$\dfrac{dh}{dt} = w_\eta - w_b = \dfrac{Q(R^2-a^2)}{\pi R^2 a^2}$ です。外側の領域では、$\dfrac{dh}{dt} = w_\eta = -\dfrac{Q}{\pi R^2}$ です。初期の水深を H とすると、半径 a の領域では $h = H + \dfrac{Q(R^2-a^2)t}{\pi R^2 a^2}$、その外側の領域では、$h = H - \dfrac{Qt}{\pi R^2}$ です。

エクマン層の摩擦が無視できるとすると、$\dfrac{f+\zeta}{h} = \dfrac{f}{H}$ [式 (3.1)] より、$\zeta = f\left(\dfrac{h}{H} - 1\right)$ [式 (3.2)] なので、a の内側では、$\zeta = \dfrac{fQ(R^2-a^2)}{\pi R^2 a^2}t$ となり、外側では、$\zeta = -\dfrac{fQt}{\pi R^2}$ です。ζ と中心周りの流速 v_θ の関係は、

$$\zeta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}rv_\theta$$

なので、$r = a$ で v_θ が連続になるという条件で、解くと、

$$v_\theta = \frac{fQ(R^2-a^2)tr}{2\pi R^2 a^2} \qquad \text{for } r < a$$

$$v_\theta = \frac{fQtr}{2\pi R^2}\left[\frac{R^2}{r^2} - 1\right] \qquad \text{for } a \le r \le R$$

となります。水を抜いている領域では強い低気圧性の渦 (ここでが $f > 0$ としているので反時計回り) が出来ます。その外では、流れは同じ回転方向ですが、徐々に速度は減少し、水槽の縁 ($r = R$) で流速がゼロになります。$a < r < R$ では渦度は負なので、「顔」を置くと、顔の中心に時計周りに回転しながら、顔の中心は水槽の中心を反時計回りに回ることになります。図３－２で、外側の流れが r の増大とともに更に速やかに減少するような解です。また、この問題では、dh/dt の水槽全域での積分がゼロなので、渦度の総量はゼロになっていて、それ故、水槽の縁での流速は時間に依らずゼロになります。

4 ロスビー波

4.1 地形性ロスビー波

ポテンシャル渦度の保存

$$q = \frac{f+\zeta}{h} = \text{一定}$$

は流体毎に成立します (ここで、f は水槽の回転角速度の 2 倍で「惑星渦度」、ζ は水槽に相対的な個々の水の柱の回転角速度の 2 倍で「相対渦度」)。要するに，初期に $\zeta = 0$ とした時、流体がその場所より浅い方に流されると高気圧性の渦度が生じ，深い方に流されると低気圧性の渦度が生じることになります。

水平面内で $x-y$ 座標を考え，y 方向に水深が浅くなっているとしましょう。その中に高気圧性の渦を置いたとします。今，$f>0$ とすれば、渦の周りには時計周りの流れが存在するので，渦の右側 (x が大きい側) には、深い方向きの流れが、左側 (x が小さい側) には浅い方向きの流れが生じます。この流れにより，渦の左側には、深い方から流体が流れてきます。そして、ポテンシャル渦度の保存より、高気圧性の渦度を生じます。他方，右側では浅い方から流体が流れてくるので，低気圧性の渦度が生じます。それ故，初期に与えた高気圧性の渦は左の方、すなわち、浅い方を右に見る方向に移動したことになります。ここで、注意すべきは，初期に与えた渦を構成する流体が左に移動したのではなく、流体が、深い方から浅い方，もしくは、浅い方から深い方に移動することにより、渦の位置が左に移動したということです。このように、もの (流体) そのものはほとんど移動せず，情報や構造のみが遠くまで伝播するものを波といい、ポテンシャル渦度保存則により生じる波をロスビー波と総称します。なお、ここでは、底が傾斜している場合を考えました。このように地形が静止状態でのポテンシャル渦度の分布を作っている場合のロスビー波を地形性ロスビー波といいます。

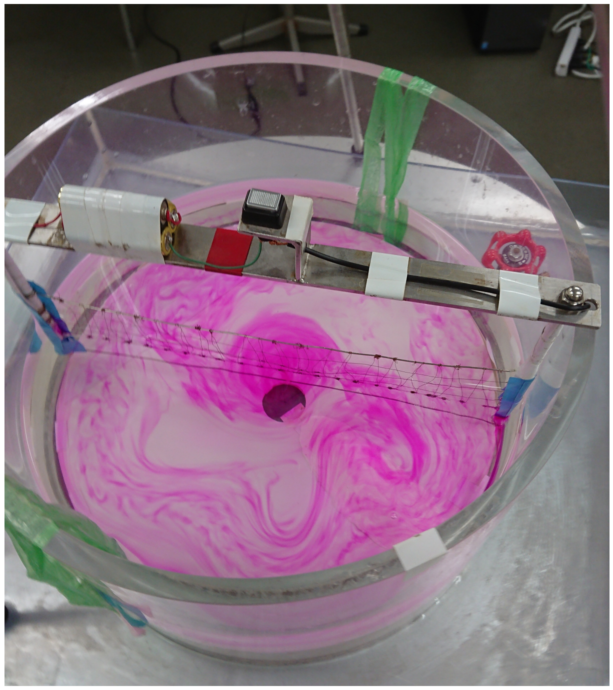
(最初に与えるのが低気圧の場合、低気圧は北半球では反時計周りの渦なので、左側では、浅い方から深い方へ、右側では深い方から浅い方に水が動きますので、左側に低気圧が出来、高気圧を初期に置いたのと全く同様に、低気圧は左の方に移動します。)

蛇足ですが、浅い方に行くと高気圧生の循環が生じますが、高気圧性の循環は、自転とは逆の回転ですから、北半球では時計回り (負の回転)、南半球では反時計回り (正の回転) です。生じる回転方向が逆なので、南半球では、地形性ロスビー波は浅い方を左手に見る方向に伝播します。

―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――

すり鉢型の底と山のある水槽から水を抜く実験 (06/02)

これは、中央が深く縁のほうが浅い底を考え、その一部に浅い方から深い方に連なる低い山をつけた水槽に水を満たし、回転させ、中の水が水槽と一緒に回転するようになった後、少しずつ水を抜くという実験でした。6 月 2 日の実験の写真を載せます。



写真のように山より下流では流れは蛇行します。この実験の解釈のために、まず等深線を描いてみましょう。山がなければ、等深線は同心円状に一回りします。その状況で水を抜くと、06 月 02 日の実験同様の時計回りの流れが出来ます。前回のプリントに書いたように、時計回りの循環がある程度強くなると、底にできたエクマン層に吸い込まれる水と水面の降下速度が等しくなり、それ以上強くならなくなります。その時の回転角速度を ϖ とすると、水深 H のところに居た水柱のポテンシャル渦度は $(f + 2\varpi)/H$ です。これが流れに沿って保存しつつ、等深線に沿って流れます。ここでは、山の上流で $h = H$ の等深線上にあった水柱を考えます。

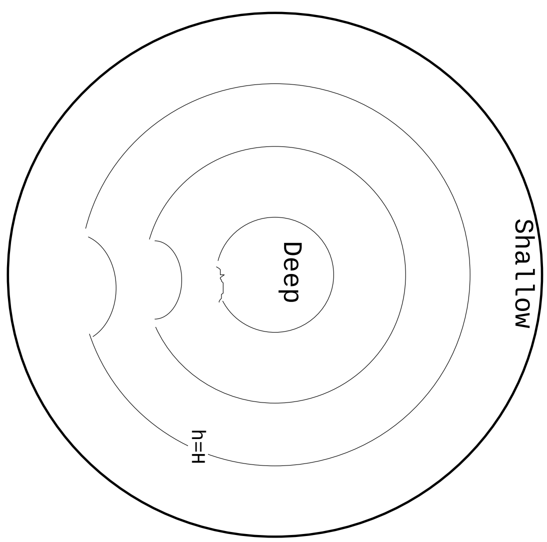


図:　すり鉢状の底に山があった時の水深の分布。

さて山があった場合、等深線は急に水槽中心の方に折れ曲がります。それ故、流れは、そこで等深線に沿うことが出来ず、浅い領域 (山の上) に入ってしまいます。H と異なる水深 h の場所に水が流れこんだとすると、

ポテンシャル渦度は保存していますから、相対渦度 ζ が生じます。

$$\frac{f + 2\bar{\omega} + \zeta}{h} = \frac{f + 2\bar{\omega}}{H}$$

となり、これより、

$$\zeta = (f + 2\bar{\omega})\left(\frac{h}{H} - 1\right)$$

が得られます。これより、$h < H$ では $\zeta < 0$ (時計回り)、$h > H$ では $\zeta > 0$ (反時計回り) になることが分かります。ここでの実験では、まず、流体は山に乗り上げますから、そこでは水深が浅くなり ($h < H$)、負の渦度が生じます。それによって流れは右に曲げられ、水槽の中心の方に流れます、そうすると、その内また、$h = H$ の等値線に達し、それを横切って深い領域 ($h > H$) に入っていきます。そうすると、$\zeta > 0$ となり、今度は流れの向きを徐々に左に変えていきます。左に向きを変えると外向きになりますから、その内、$h = H$ の等深線に到達し、それを横切り、浅い領域 ($h < H$) に入ります。そうすると $\zeta < 0$ となり、徐々に向きを右に変え、その内、また、$h = H$ の等深線を横切り、$\zeta > 0$ となり、を繰り返すことになります。これは、振り子の振動と同じように、平衡点である $h = H$ の回りでの振動とみなすことができます。山は、平衡点からずらすという役割をします。

この実験の場合、水槽全体に時計回りの流れがあり、上で述べた蛇行は、その大規模な流れの中で停滞しています。そのことはもし流れがなければ、この蛇行は反時計回り、すなわち、浅い方を右手に見て、移動することになります。これは上で述べた、地形性ロスビー波です。(反時計回りに進む波が時計回りの流れの中で停滞している)。

付録:　コーン型の底に山のある水槽から水を抜くと？

上の実験と逆に中央が高く周囲が低い底を沈め、その上に山を置いたらどうなるか？　その場合の等水深線は下の図のようになる。

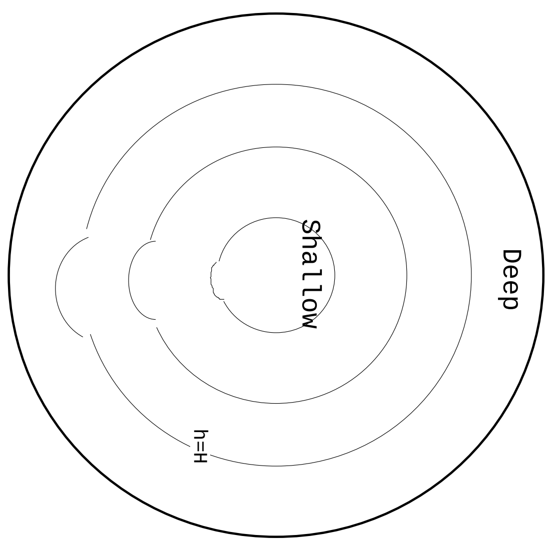


図:　コーン型の底に山があった時の水深の分布。

水を抜けば、時計回りの流れが出来ます。それが山に差し掛かると h が小さくなります。h が小さくなると $\zeta < 0$ となり、右に曲げられます。右に曲げられると、更に浅い方に行くので、結局、深い方に戻ることは

出来ず、波型になることはありません。実際には、山をこえるとすると、山より上流側で深い側に進路が少しずれ、それによって山を超えて、また、等深線に近づくことになります。何れにせよ。波は出来ません。これは、波の伝播方向 (浅い方を右に見るので、この場合、時計回り) と流れの方向が一致するため、波は止まることが出来ないからです。

4.2 底の傾斜と地球が丸いということ: 惑星ロスビー波

6 月 9 日の実験では、椅子に座って回転しながら、初期に軸が水平で回転していない車輪の軸を徐々に立てていくと、車輪の軸周りの回転がどう見えるかという実験をしました。(ここで、「軸回り」というは「軸に相対的な回転」という意味ではなく、「軸に直交する面内での回転運動」という意味で使っています。) 椅子に座って回転している人からは、椅子の回転と逆向きに回転するように見えました。他方、外から見ている人には、車輪はその軸の周りにはほとんど回転していないように見えました。これの一番の原理は、回転していないものは、回転するような力を加えなければ回転しないという事です。すなわち、車輪はその軸の向きを変えたからといって回転はしません。外から見ている人に軸周りに回転していないように見えたのはその意味では当然です。椅子に座っている人から回転して見えたのは自分が回転しているからです。自分の回転軸 (鉛直上向き) と車輪の回転軸が直交しているとき (車軸が水平の時) には、車軸は回転していませんが、その車軸の角度が自分の回転軸の方向に近づくに従って、自分の回転の車軸方向の成分の大きさだけ逆に回転しているように見えてくるわけです。車軸を真上に向ければ、自分の回転速度と同じ大きさで、逆向きに回転しているように見えます。(回転していないものを回転しながら見ると回転して見えるという話です)

地球は丸く、そして、大気や海洋は，丸い地球の表面にへばりつく薄い流体の層です。それ故、地球上での大規模な海洋や大気の流れは、ほぼ水平面内にあります。運動がほぼ水平なので，地球自転は、その地表に垂直な成分 (鉛直成分) しか影響しません。この場合、流体の回転軸は地表に直交しているので、06/09 の実験と同じように、赤道で止まっていた流体が北に運ばれると緯度が高くなるに従って、地球上で見ると時計回りに回転していく事になります。

地球の自転角速度ベクトルの大きさを Ω としたとき、緯度 θ(rad) での地球自転角速度ベクトルの地表に垂直な成分の大きさは $\Omega\sin\theta$ です。[この回転は、回転椅子に座って車輪を手で押さえ，回転したときの、外にいる回転していない人から見たときの車輪の車軸周りでの回転です]。したがって、惑星渦度 f (コリオリ力の係数でもある) は (水槽の回転角速度の 2 倍だったので) $f = 2\Omega\sin\theta$ となります。f は高緯度で大きく，赤道でゼロ，南半球では負になります。このことはポテンシャル渦度 $q = (f+\zeta)/h$ の f が緯度の関数ということです。初期の流体の位置での f が f_0, h が H_0 で、その時，$\zeta = 0$ であったとしましょう。そうすると、$(f+\zeta)/h = f_0/H_0$ なので、流体が移動したときの ζ の生成は

$$\zeta = f_0\left(\frac{h}{H_0} - \frac{f}{f_0}\right)$$

となります。$h/H_0 = 1$(流体の厚さが変化しない) 時、高緯度 $(f/f_0 > 1)$ へ行けば，$(h/H_0 - f/f_0) < 0$ ですから、$f/f_0 = 1$ で、浅い方に移動したのと同じになります。要するに、$h/H_0 = 1$ の時、高緯度 $(f/f_0 > 1)$ へ行けば，高気圧性の相対渦度が生じ，低緯度へ行けば，低気圧性の相対渦度が生じることになります。これは、逆の言い方をすれば，(f_0 の正負に関わらず) 回転水槽の水深の浅い方は極側に、深い方は赤道側に対応するということです。

惑星ロスビー波の伝播方向は、上の地形性ロスビー波と同様に考えれば，北半球では、北が浅い方に対応しますから、西向きに伝播します。南半球では、南側が浅い方に対応しますから、南半球でもやはり惑星ロスビー波は西向きに伝播することが分かります。これは、f の正負に関わりなく、 f は北ほど大きい ($f - f_0$ は北に行けば南半球でも北半球でも正) ということからも明らかです。

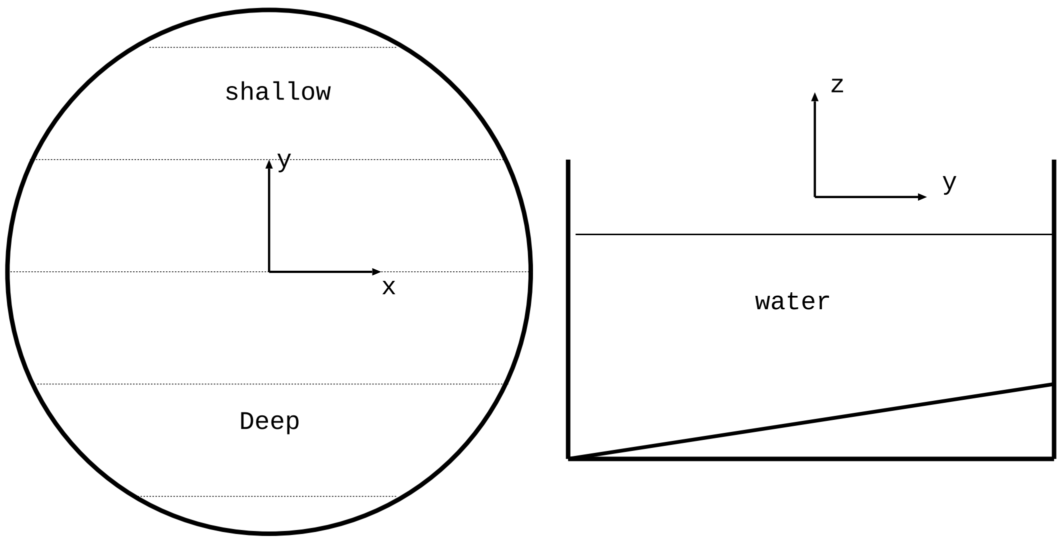
以上より、第 4 回 (06/02) の水槽実験で水を抜いた時の流れは西風 (東向きの流れ) に対応することが分かります。現実の地球にも、次頁の図に示すように、水槽実験と似た偏西風の蛇行が見られれます。

また、中央が浅いケース (コーン型の底) は、中央が高緯度に対応し、水を抜くことによって生じた時計回りの流れは、東風 (西向きの流れ) に対応します。その場合には、流れの向きと波の伝播方向が同じであるため、蛇行は現れません。

なお、惑星渦度が緯度とともに変わることが大気や海洋に与える効果をβ効果といいます。また、水深の変化が与える同様の効果を地形性β効果といいます。

本日のテーマ：深さ分布と流れ：一様に傾斜した底を持つ水槽から水を抜く

今日は下図に示すような水槽を回転させ、水を抜きます。どのような流れが出来るでしょう。



図の説明：左図は円筒形水槽を上から見たところ。y 軸方向に浅くなる。右図は横から見たところ。

さて、私の担当は今日で終わりです。
オンライン授業になってしまったことも有り、分かりにくい点も多かったかと思います。また、不慣れ故のハウリングが集中力を欠いた人も居るかもしれません。
来週 6/23 からは水田さんによる「海の流れと変動」です。対面で出来るか、オンラインになるかは大学の判断に依ります。
何れにせよ、ここで話が一度変わりますから、実験がよく分からなかったという人も、安心して次へ行きましょう。
なお、今回のレポートも同じように、来週の授業の前日までにメール添付で提出して下さい。今回の授業のまとめも来週、moodle に上げます。また、レポートを出していなかった人で出しおこうと思う人は出して下さい。

おすすめの本

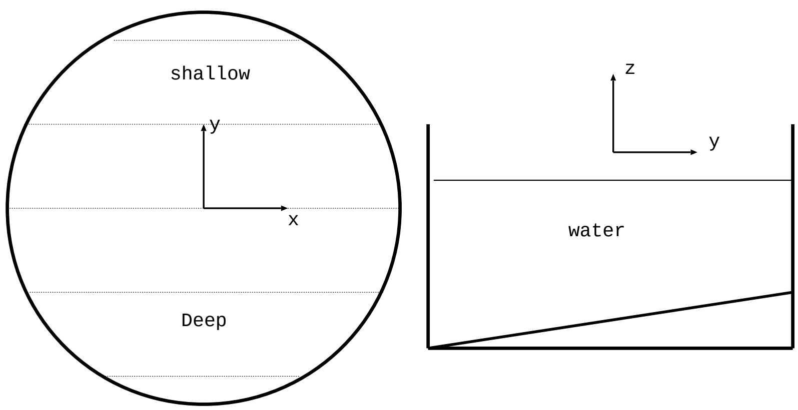
既に読んでいる人も居るようですが、
「流れの科学ー自然現象からのアプローチ」　木村竜治　著　東海大学出版会
この授業に興味を持った人なら確実に楽しめる本です。

5　西方強化・海洋の循環

最後に行った実験の解説です。この実験に関しても理解するのに必要な原理は、唯一つ、「ポテンシャル渦度の保存」

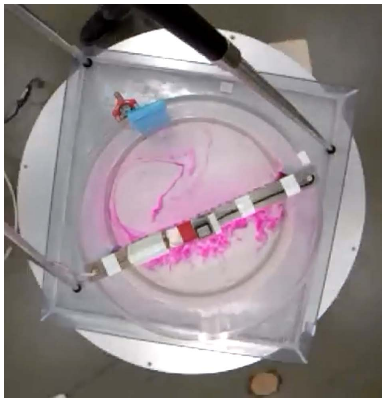
$$q = \frac{f+\zeta}{h} = \text{一定}$$

だけです。この原理は、フィギュアスケートのスピンにおいて、スケーターが両腕を体から両側に伸ばせは回転が遅くなり、両腕を体幹に近づければ回転が速くなるのと同じです。f が水槽の回転角速度の 2 倍 = 惑星渦度、ζ が水槽人から見た時の部分部分で定義される流体の (水柱の) 回転角速度の 2 倍 = 相対渦度です。$f+\zeta$ が水槽の外から見た時の水槽内の個々の水柱の回転角速度の 2 倍を表します。h は流体の厚さで、h の減少 (増加) は、水の柱が太く (細く) なる、すなわち、フィギュアスケートにおいて腕を両側に伸ばす (体に近づける) ことに対応します (6 月 2 日配布のプリントも参照)。なお、水槽の回転は例によって北半球を想定して反時計回りとします。



実験装置：左図は円筒形水槽を上から見たところ。y 軸方向に浅くなる。右図は横から見たところ。

この実験では、3 回目と 4 回目の実験と同様に水を抜いて水位を下げることにより、h を減少させ、$\zeta < 0$(時計回り) の循環を作ります。3 回目、4 回目との違いは、一様な底傾斜を与えたことです。3 回目では水槽の底は平らですので、h の減少で一様な ζ が生じ、一様に回転しました。4 回目の実験では底をすり鉢状にして一部に山を作りましたが、等水深線は一回りしていました。水を抜くことによる生じる時計回りの流れは、ほぼ等深線に沿って流れようとしますが、山のところで等深線からずれ、その後は、右へ行ったり左へ行ったりと、波波します。しかし、流れは概ね水槽の中心を中心として時計回りに回ります。それらに対して今回の実験では、底の傾斜は一様で、等深線は水槽を横切っているため、水は等深線に沿って一回り出来ない状況です。そこが大きな違いです。



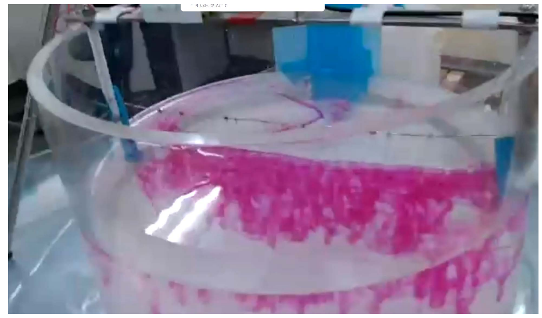


図:　2021 年 6 月 16 日の実験の写真。右図:上からの写真。左上方の青いテープが貼ってあるところが浅い。左図：横からの写真。深い側から取っている。

底に傾斜がない場合、水を抜くと h が減り、時計回りの循環ができます。底が傾斜している場合も全体としては時計回りになると考えられます。浅い方を上に深い方を下にして図を描いた場合、右側では浅い方から深い方へ、左側では深い方から浅い方への流れが生じることが期待されます。この時、ポテンシャル渦度の保存に従えば、左の方では h が減少するので時計回りが強まり、右の方では h が増大する方向なので時計回りの循環が弱まることになります。また、浅い方から深い方と、深い方から浅い方に流れる水の量は等しくなければいけないので、循環の中心が左に移動することが予想されます。このことが最終的にどういう流れを作るかを考えるには、そもそも全体としての時計回りの流れは、h の減少により生じるものであることに注意が必要です。右側の流れは浅い方から深い方に流れますが、もし、それにより h が増えると、時計回りの流れが出来る理由がなくなります。h が増えないようにして浅い方から深い方に流れるためには、水を抜くことによる水位の減少に比べて、深い方向きの流れによる (傾斜の存在による) 厚さの増加が小さいか等しくなければいけません。実際には、水位の減少分だけ、浅い方から深い方に流れるという風になります (水面が Δh 下がったら、Δh だけ深いところに移動する。これが浅い方から深い方に流れるときの可能な最大流速を与えます)。そのように流れると h は不変で、$\zeta = 0$ のままですから、流れは渦度を持たない、すなわち、一様に、深い方に移動することになります。他方、水を抜くことにより時計回りの循環が出来るのですから、左側では深い方から浅い方向きです (このように深い方から浅い方に行く流れがないと、浅いところの水が足りなくなります)。これは水位が減少する中、深い方から浅い方への流れですから、流れに沿って h が大きく減少します。それ故、大きな負の ζ が生じます。この負の ζ による流れは左の側壁で大きな流速を持ち、側壁から離れると急速に小さくなるような分布です (左側の壁際にのみ存在可能です)。この様にして、深い方から浅い方への流れは左の壁にへばりついた細くて強い流れとなり、浅い方から深い方への流れは、幅の広い一様な弱い流れとなります。地球との対応では、浅い方が極側に対応しますので、左側は西になります (06/16 配布の復習プリント参照)。海洋の西岸に沿う流れが強化されることから、この現象を西方強化、もしくは、西岸強化と言い、また、その強い流れを西岸境界流と言います。北太平洋の西の端には非常に強い海流である黒潮がありますが、黒潮も西岸境界流です。

実験では、右向きに流れのある浅い領域で流れが蛇行しますが、これは、4 回目の実験と同様のロスビー波です。また、黒潮を西端とする太平洋の時計回りの大きな循環である亜熱帯循環は偏西風と貿易風によって駆動されますが、その形成メカニズムはこの水槽実験と同様に h の減少によると考えることも可能です。それは以下のように説明されます。

海面が風に擦られると、海面近くの水は風の向きに力を受けます。しかし、水がその方向に動くとコリオリ力を受けて、北半球であれば右に曲げられます。曲げられて、海水の流れが風の方向と直角になると、海面を擦る風の力とコリオリ力が釣り合うようになります。それ故、東向きの風が吹く偏西風帯では海面近く (の摩擦が重要となるエクマン層) の流れは南向きになり、西向きの風が吹く貿易風帯では北向きになります。このようにして、海面近くの水は偏西風と貿易風の間の緯度帯に集まってきます。そうやって集まった表層の水は下降流になります。この下降流と、実験での水面の降下を同じものとみなすことができるというわけです。これは、2 回目の実験で水より水槽の速度が小さいと水槽の中央に底近く (エクマン層内) の水が集まり上昇流を作るという実験を観察しましたが、それと同じ話です。なお、現実では底の傾斜はありませんが、水槽内の底の傾斜は低緯度ほど f が小さいことに対応しており、水槽で見られた弱くて幅の広い流れは、海洋では h の減少と f の減少が同じ (h と f が共に減少しつつ $f/h =$ 一定) になることによって $\zeta = 0$ の流れになっています。

分かりにくい点もあったかもしれませんが、少しでもこのような世界に興味を持ってもらえれば幸いです。質問等がある場合には、kubok@ees.hokudai.ac.jp に気軽にメール下さい。