数学編

必答問題の数学は、主には、三角関数と指数関数、ベクトル、行列、積分・微分、微分方程式、です。他のものも出ているようですが、8 割方はこんなものでしょう。

まず、記号や演算規則等を知っていることが重要です。他方、積分や微分方程式は手法によらず解ければよいという立場です。必答問題で出てくるような問題は、大体の場合、公式化されているような一般性のある解き方を知らなくても解けます。この解説もそういう立場で書きます。なお、この短い解説で与えている知識だけは解けない問題も出題されていますし、これからも出題されると思いますが、それらに関しては、教科書等を当たってもらえればと思います。

1　指数関数と三角関数

指数関数 e^t は t で微分したものが元の関数と同じになる関数であり、t のべき級数で表すと

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3\cdot 2}t^3 + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}t^4 + \cdots$$

となる。他方、虚数 $i\theta$ (ここで i は虚数単位、θ は実数) を引数とする指数関数 $e^{i\theta}$ は複素面上の半径 1 の円周上の点を表す（図 1 参照) ので、

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\ . \tag{1}$$

したがって、cos, sin は指数関数を用いると、

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \tag{2}$$

と書くことができる。この表記は微積分においても便利であり、さらに、$z^2 = i$ を満足する z (i の平方根、$\pm\sqrt{i}$) なども簡単に求まる。

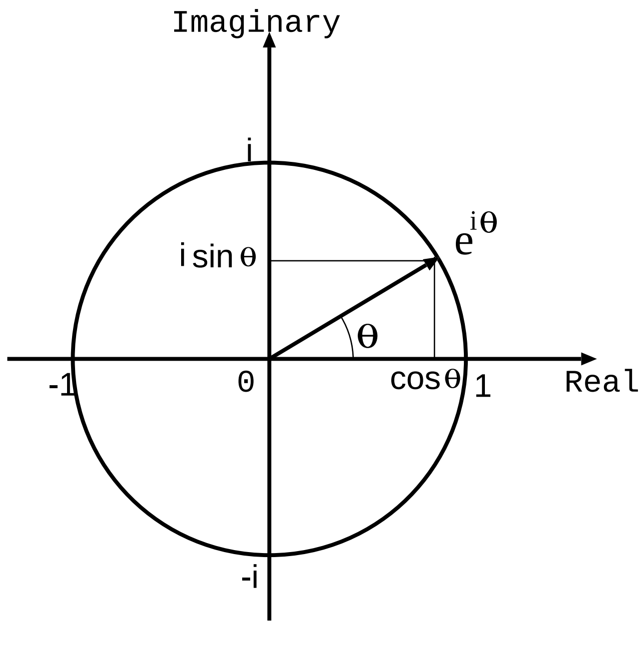

図 1：$e^{i\theta}$ と $\cos\theta,\ \sin\theta$ の関係

図 1 より、i は $\theta=\pi/2$ の位置である。一般的には、$2n\pi$(ここで n は整数) を加えても同じなので、$i=e^{i(\pi/2+2n\pi)}$ と書ける。したがって、

$$z=\left(e^{i(\pi/2+2n\pi)}\right)^{1/2}=e^{i(\pi/4+n\pi)}=\cos(\pi/4+n\pi)+i\sin(\pi/4+n\pi)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \tag{3}$$

$\pm$ が付いているが、これは、n が偶数の場合には 45°、奇数の場合には 225° になるからである。

2　ベクトル

ベクトルは、力学の理解に必須である。我々は 3 次元の空間に住んでおり、空気も水も、他の物体も 3 次元で運動する。その運動や力学はベクトル表記を用いることにより簡明に記述できる。スカラー積 (内積)、ベクトル積 (外積)、ベクトル演算子 ∇(ナブラ, デル) による、gradient, divergence, rotation 等の演算規則を知っている必要がある。

ベクトル演算をする場合には、デカルト座標系 (直交直線座標系、直角座標系、x-y-z 座標系) での成分表記を用いるのが簡便である。x 軸、y 軸、z 軸、それぞれの方向の単位ベクトル (基本ベクトルという) を $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とすると、ベクトル $\boldsymbol{A}$ はその x,y,z 成分を A_x,A_y,A_z と書くと、

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k} \tag{4}$$

と表記できる。この表記は、ベクトル $\boldsymbol{A}$ は x 軸、y 軸、z 軸それぞれの方向を向いた互いに直交しているベクトル $A_x\boldsymbol{i},A_y\boldsymbol{j},A_z\boldsymbol{k}$ の和であるということを意味する。それぞれの軸方向のベクトルの振幅 A_x,A_y,A_z については通常の四則演算ができる。したがって、これらのことより、ベクトルの演算ルールは、$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ についてのみ知っていれば事足りるということが分かる。

2.1　ベクトルの積

- **スカラーとベクトルの積:** ただのスカラー量 c とベクトル $\boldsymbol{A}$ の積。$c\boldsymbol{A}$ と表記。

$$c\boldsymbol{A}=cA_x\boldsymbol{i}+cA_y\boldsymbol{j}+cA_z\boldsymbol{k} \tag{5}$$

  で、各成分が c 倍になる。

- **スカラー積:** $\cdot$ で表す。定義は、2 つの平行なベクトルのスカラー積は、二つのベクトルの大きさの積。直交している 2 つのベクトルのスカラー積はゼロ。

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{6}$$

  これを用いると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= [A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}]\cdot[B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}]\\ &= A_xB_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+A_xB_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+A_xB_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+A_yB_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+A_yB_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\ &\quad +A_yB_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+A_zB_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+A_zB_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+A_zB_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\ &= A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned} \tag{7}$$

  結果はスカラー。

- **ベクトル積:** $\times$ で表す。定義は、2 つの平行なベクトルのベクトル積はゼロ。直交している 2 つのベクトルのベクトル積により生成されるベクトルは、両者に直交し、積の順に対応した右ネジの方向を向く。

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0 \tag{8}$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j} \tag{9}$$
$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j} \tag{10}$$

$\boldsymbol{i}\to\boldsymbol{j}\to\boldsymbol{k}$ と順番に回して行くと正、逆に回すと負である。この演算規則を用いると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= [A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}]\times[B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}]\\ &= A_xB_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+A_xB_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+A_xB_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+A_yB_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+A_yB_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}\\ &\quad +A_yB_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+A_zB_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+A_zB_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+A_zB_z\boldsymbol{k}j\times\boldsymbol{k}\\ &= (A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}\ .\end{aligned} \tag{11}$$

ベクトル積は、ベクトルの向きを変える演算。$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{j}$ を x 軸 ($\boldsymbol{i}$) の周りに 90 度回転させると $\boldsymbol{k}$ になるという演算である。故に、物理では回転的なものを表すために使われる。

2.2 ナブラ演算子

ナブラ演算子 (∇、 デル演算子ともいう) は $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ を用いると、

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{12}$$

と書ける。

- **傾き (gradient):** スカラー関数 $\phi(x,y,z)$ に ∇ を作用させる。$\nabla\phi$、もしくは、grad ϕ と表記。

$$\nabla\phi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

なので、$\nabla\phi$ の各成分は、ϕ のそれぞれの方向への微分。$\nabla\phi$ の向きは、ϕ が最も大きく変化する方向 ($\phi=$一定の面に直交し、かつ、ϕ が大きくなる方向)。例えば、$\phi=\phi(x,y)$ という風に 2 次元の場合には、$\phi(x,y)=$ 一定は地図の等高線と思えばよい。山がある場合、$\nabla\phi$ の方向はまっすぐ山を登る方向 (等高線と直交する方向) であり、$|\nabla\phi|$ は傾斜である。

- **発散 (divergence):** 場所により強さや方向の変わるベクトルに ∇ 演算子をスカラー積風に作用させる。$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$、もしくは、div $\boldsymbol{A}$ と表記。
(ベクトルが x,y,z の関数というというのは、例えば、風を考えればよい。風は風向と風速をもつベクトルであり、それは場所によって異なり、かつ、連続的に変化する。)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot[A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}]\\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\ &\quad +\frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+\frac{\partial A_y}{\partial z}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}A_x+\frac{\partial}{\partial y}A_y+\frac{\partial}{\partial z}A_z\ .\end{aligned} \tag{13}$$

それぞれの成分のそれぞれの方向への微分の和。スカラー積なので、スカラーである。これが正の時には、ベクトルが空間的に広がって行っている状態 (発散) を表し、負の時には集まってきている状態 (収束) を表す。

- **回転 (rotation、もしくは、curl):** ∇ 演算子をベクトル積風にベクトルに作用させる。$\nabla \times \boldsymbol{A}$、もしくは、rot $\boldsymbol{A}$、もしくは、curl $\boldsymbol{A}$ と表記。

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] \times [A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}] \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial x}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} \\
&\quad + \frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + \frac{\partial A_y}{\partial z}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} \\
&= \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\boldsymbol{k} \qquad (14)
\end{aligned}$$

これはベクトルの分布の回転的な性質を引き出すベクトルであり、その方向は回転軸の方向 (右ネジの方向)。$\boldsymbol{A}$ が空気や水の速度の場合、$\nabla \times \boldsymbol{A}$ は渦度とよばれる、渦の強度と (回転軸の) 方向を定量的に表す、物理量である。

3 行列

連立方程式は、

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \qquad (15)$$

の形に書ける。ここで、 A は行列、$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ はベクトル

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \ddots \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ある。この式は、$\boldsymbol{y}$ が既知で $\boldsymbol{x}$ が未知あれば、$\boldsymbol{x}$ に関する連立 1 次方程式であるが、$\boldsymbol{x}$ が与えられている場合、$\boldsymbol{x}$ に A を作用させ (定数をかけて足したり引いたりする) て$\boldsymbol{y}$を生み出す演算とも言える。行列はコンピューターで扱い易いので、データ解析や微分方程式の近似解を求めたりするのに多用される。なお、実際に手で解けるのは 3×3 ぐらいまでなので、以下では 3×3 を中心に述べる。

3.1 行列の積

$n \times n$ の行列 A, B の積を C

$$\mathsf{C} = \mathsf{AB}$$

とし、行列 C, A, B の ij 成分を c_{ij}, a_{ij}, b_{ij} たとき、

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

3.2　行列式

2×2 の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3×3 の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

連立方程式、

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = 0 \tag{16}$$

は $\boldsymbol{x}$ の全成分がゼロ $(x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0)$ を解に持つ。こういう解を自明な解というが、(16) が自明でない解を持つとき $|\mathsf{A}| = 0$ である。また、ベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$ のベクトル積は、行列式を用いて、

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

と書かれることも多い。

3.3　逆行列

$$\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{E} \quad \text{ここで、}\mathsf{E}\text{は単位行列} \tag{17}$$

となる A^{-1} を A の逆行列という。A^{-1} が存在するためには、$|\mathsf{A}| \neq 0$ でなければいけない。連立方程式 (15) に逆行列をかけると

$$\boldsymbol{x} = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{y}$$

である。これは、(A が 3×3 とすれば) 連立方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= y_3 \end{aligned} \tag{18}$$

の各式に、数値をかけて、足したり引いたりして、

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3 \end{aligned}$$

と変形した時の $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ が A^{-1} ということである。

3.4 固有値・固有ベクトル

$$\mathsf{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \tag{19}$$

が満足されるとき、λ を A の固有値、$\boldsymbol{u}$ を固有ベクトルという。この式は、

$$(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E})\,\boldsymbol{u} = 0 \tag{20}$$

と書き直せる。$\boldsymbol{u}$ はゼロベクトルではないので、行列式はゼロ。すなわち、

$$|\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E}| = 0. \tag{21}$$

これを解いて、λ を計算する。λ が求まれば、それに対応する (属する) 固有ベクトルは (3×3 であれば)

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 &= 0 \\
a_{21}u_1 + (a_{22} - \lambda)u_2 + a_{23}u_3 &= 0 \\
a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + (a_{33} - \lambda)u_3 &= 0
\end{aligned}$$

(のうちの 2 式) から求まる。大きさは任意である。任意なので特に指定がなければ、$u_1 = 1$ としたり、$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ と規格化したりする。

4 積分・微分

4.1 部分積分

積分テクニックでよく用いられるのは部分積分。これは、微分の法則

$$\frac{d}{dx}\left\{A(x)B(x)\right\} = \frac{dA}{dx}B + A\frac{dB}{dx}$$

を用い、

$$\begin{aligned}
\int \frac{dA}{dx}Bdx &= \int \frac{d}{dx}\left\{A(x)B(x)\right\}dx - \int A\frac{dB}{dx}dx \\
&= A(x)B(x) - \int A\frac{dB}{dx}dx + \text{定数}
\end{aligned}$$

というような変形により積分し易い形にしていく。例えば、$dA/dx = e^{ax}, B = x$ なら、

$$\int e^{ax}xdx = \int \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{a}e^{ax}x\right\}dx - \int \frac{1}{a}e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}x - \frac{1}{a^2}e^{ax} + \text{定数}$$

と積分できる。$dA/dx = e^{ax}, \quad B = \sin bx$ なら、二回部分積分して、

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \int \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx\right\}dx - \int \frac{b}{a}e^{ax}\cos bxdx$$

$$= \int \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx\right\}dx - \int \frac{d}{dx}\left\{\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx\right\}dx - \int \frac{b^2}{a^2}e^{ax}\sin bxdx\ .$$

右辺の最後の項の積分は左辺と同じなので、

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\sin bxdx = \int \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx\right\}dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx + \text{定数}\ .$$

より、

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx + 定数\ .$$

なお、$\int e^{ax}\sin bx dx$ は $e^{ax}\sin bx = \frac{1}{2i}(e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x})$ であることを用いれば、部分積分は必要ないが。

4.2 変数変換

変数を変えることにより、積分を遂行するというのもある。特に、大学入試の積分というのは、多分、これ（私は忘れてしまったけれど)。$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} A(x)dx$ という積分があったとき、$A(x) = B(y(x))$ と、$y(x)$ を用いて書き換えられるなら、

$$\int_{x_1}^{x_2} A(x)dx = \int_{y(x_1)}^{y(x_2)} B(y)\frac{dx}{dy}dy$$

たとえば、

$$\int_0^{1/2} \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

は、$x = \sin y$ となる y を導入すれば ($y = \sin^{-1}x$ なので)、

$$\int_0^{\pi/6} \frac{y\sin y}{\cos y}\frac{dx}{dy}dy = \int_0^{\pi/6} y\sin y dy$$

となり、後は、部分積分で容易に求まる。

4.3 微分の積分・積分の微分

微分して積分すれば、元に戻る。例えば、

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi}{dx}dx = \int_{\phi(x_1)}^{\phi(x_2)} d\phi = \phi(x_2) - \phi(x_1)$$

3 次元の場合 (関数が $\phi(x,y,z)$) も同様に、$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ として、

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \nabla\phi\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right] = \int_{\phi(\boldsymbol{r}_1)}^{\phi(\boldsymbol{r}_2)} d\phi = \phi(\boldsymbol{r}_2) - \phi(\boldsymbol{r}_1) \tag{22}$$

この場合も、始点と終点のみで決まる。

積分 $\displaystyle\int_0^t F(x)dx$ の t による微分はもちろん $F(t)$ である。より一般に、積分領域が t の関数であったり、F が t の関数でもある場合には、積分の微分は、積分領域の端の微分と、積分される関数の微分に分けられる。

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} F(x,t)dx = \frac{dx_2}{dt}F(x_2,t) - \frac{dx_1}{dt}F(x_1,t) + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{d}{dt}F(x,t)dx\ .$$

4.4　線積分・ベクトルの積分

スカラー関数の線積分

関数 $F(x,y)$ を x-y 面上の与えられた経路に沿った積分はどう解くのか？ この経路を C と呼ぶことにし、この経路 C に沿う長さを s とすると、この積分は

$$I = \int_C F(x,y)ds \tag{23}$$

と書かれる。x での積分の代わりに C という線を考えているだけである。長さ ds を dx, dy で表現すると、$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ なので、経路 C が変数 t を用いて、$x = x_s(t), y = y_s(t)$ で与えられているなら、$ds = \sqrt{(dx_s/dt)^2 + (dy_s/dt)^2}\ dt$ となる。したがって積分 I は

$$I = \int_C F(x,y)ds = \int_C F(x_s(t), y_s(t))\sqrt{\left(\frac{dx_s}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_s}{dt}\right)^2}dt.$$

例えば、$F(x,y) = x+y$ で C が $(x,y) = (0,0)$ から $(1,1)$ への直線であるとすると、$x_s(t) = t,\ y_s(t) = t$ と置け、そのとき、$F(x_s(t), y_s(t)) = 2t$ なので、

$$I = \int_C F(x_s(t), y_s(t))\sqrt{\left(\frac{dx_s}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_s}{dt}\right)^2}dt = \int_0^1 2\ t\sqrt{2}\ dt = \sqrt{2}$$

となる。

ベクトルの積分

ベクトル $\boldsymbol{F}(x,y) = \boldsymbol{i}F_x(x,y) + \boldsymbol{j}F_y(x,y)$ の積分

$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (F_x dx + F_y dy)$$

を考えよう。この積分は、力学では $\boldsymbol{F}$ を力、C を質点の移動経路としたときにの仕事を与える。経路が $x = x_s(t),\ y = y_s(t)$ で与えられているときには、

$$\int_C (F_x dx + F_y dy) = \int_C \left(F_x\frac{dx_s}{dt} + F_y\frac{dy_s}{dt}\right)dt$$

と書ける。$\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$ となる $\phi(x,y)$ が存在する場合には、微分の積分なので、経路によらず、始点と終点の ϕ で決まる (前節 (22) 参照)。

・ストークスの定理：積分路 C が閉じている場合には、ストークスの定理により、

$$\oint_C \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = \int\int_A \boldsymbol{k}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dxdy$$

と、面積分に変えることができる。例として

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}(x-y) + \boldsymbol{j}(x+y) \tag{24}$$

を半径 a の円周にそって一回りする積分を考える。$\boldsymbol{k}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2$ なので、

$$\oint_C \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = \int\int_A 2dxdy = 2\pi a^2$$

この場合、$\boldsymbol{k}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}$ が定数なので、円の中心がどこにあるかにも依らないことが分かる。

・**ガウスの定理：**

体積 V の閉じた領域を考え、その表面を S とする。その表面に垂直外向きの単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いた 3 次元のベクトル $\boldsymbol{U}$ の面に垂直な成分 $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}$ の S での面積分と $\boldsymbol{U}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{U}$ の V での体積分の間には

$$\int_S \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{U}\ dV$$

これをガウスの定理という。これは 2 次元でも成り立つ ($\boldsymbol{U}$ が z 方向に一様と思えばよい)。$\boldsymbol{F}$ を x-y 面上の 2 次元のベクトルとしたとき、

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds = \int_A \nabla\cdot\boldsymbol{F}dA$$

ここで、$\boldsymbol{n}$ は閉じた積分路 C に垂直外向きの x-y 面上の単位ベクトル。$\boldsymbol{F}$ として (24)、例として半径 a の円領域を A と考えると、$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=2$ なので、

$$\oint_C \boldsymbol{F}(x,y)\cdot\boldsymbol{n}ds = \int\int_A 2dxdy = 2\pi a^2$$

となる。

5 定数係数の線形常微分方程式

微分方程式というのは、関数の微分と微分していないものが入り乱れており、トータルではゼロになるような式である。例えば、

$$\frac{dx}{dt} - x = 0, \tag{25}$$

という式は、$x(t)$ を微分したものと $x(t)$ が等しいことを意味している。要するに、$x(t)$ は微分しても変化がない。微分しても元の関数と同じ形をしている関数は指数関数である。すなわち、

$$x(t) = Ae^t \qquad (\text{ここで、}A\text{ は定数}) \tag{26}$$

が解である。$\frac{dx}{dt} - ax = 0$ の場合には、$\tau = at$ とすれば明らかなように Ae^{at} が解である。

同様に、2 階の常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0, \tag{27}$$

の意味するところは、2 階微分したものが元の関数にマイナスをつけたものに等しいということで、それを満足するのは、$\sin t$ と $\cos t$ である。したがって、この微分方程式の一般解は

$$x(t) = A\sin t + B\cos t \tag{28}$$

である。しかし、$\sin t, \cos t$ は、指数関数を用いて、$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}),\ \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ と書けるので、指数関数が解ということには変わりがない。指数関数で表現すれば、

$$x(t) = Ce^{it} + De^{-it} \tag{29}$$

となり、 C, D と A, B の関係は $C = \frac{1}{2}(B - iA), D = \frac{1}{2}(B + iA)$ である。このように、定数係数の微分方程式は、必ず、指数関数型の解を持つ。

我々は (27) の解を知っているが、$Ce^{\lambda t}$ の形を仮定して、もう一度解を求めてみよう。この形を (27) に代入すると

$$(\lambda^2 + 1)Ce^{\lambda t} = 0$$

となる。左辺がゼロであるためには $\lambda^2 = -1$ なので、$\lambda = \pm i$ となり、(29) を得る。定数係数の線形微分方程式に関しては、多くの場合この様にして解を求めることが可能である。

なお、

$$\frac{dx}{dt} + ay = 0, \qquad \frac{dy}{dt} + bx = 0, \qquad \text{ここで } a, b \text{ は定数} \tag{30}$$

のような連立方程式も同じである。例えば、両式から y を消去すれば、

$$\frac{d^2x}{dt^2} - abx = 0,$$

となり、$x = Ae^{\lambda t}$ を代入すれば、 $\lambda = \pm\sqrt{ab}$ で、それ故、一般解は

$$x = Ae^{\sqrt{ab}\ t} + Be^{-\sqrt{ab}\ t}, \quad y = -\sqrt{\frac{b}{a}}\left(Ae^{\sqrt{ab}\ t} - Be^{-\sqrt{ab}\ t}\right)$$

と書ける。

発展: 上で述べた定数係数の微分方程式は必ず $x = Ae^{\lambda t}$ という形の解をもつという原則に立てば、少し難しそうな微分方程式も解くことができる。例として

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + x = 0, \qquad \text{ここで } a \text{ は正の実定数} \tag{31}$$

を考えよう。この方程式は、これまで必答問題で出てきたものに比べるとレベルは高いが、解き方としては同じである。上と同様に $x = Ae^{\lambda t}$ を (31) に代入すると、$x = Ae^{\lambda t}$ が解であるために λ が満足しなければいけない式

$$\lambda^2 + 2a\lambda + 1 = 0 \tag{32}$$

を得る。(32) の根は $\lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ なので、$a \neq 1$ の場合の一般解は

$$x(t) = C_1 e^{(-a+\sqrt{a^2-1})t} + C_2 e^{(-a-\sqrt{a^2-1})t} \tag{33}$$

となり、$a > 1$ であれば、指数関数的減衰、$0 < a < 1$ であれば、$\sqrt{a^2-1} = i\sqrt{1-a^2}$ なので、減衰振動になる。$a^2 < 1$ の場合は、$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ なので、(33) は

$$x(t) = A_1 e^{-at}\cos(\sqrt{1-a^2}\ t) + A_2 e^{-at}\sin(\sqrt{1-a^2}\ t) \tag{34}$$

と書き換えられる（$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = -iC_1 + iC_2$）。この方が解の性質は分かりやすい。

他方、$a = 1$ の時には、(32) は重根になり、指数関数型の解は e^{-t} しか存在しない。しかし、2 階の微分方程式の一般解は 2 つの基本解を必要とする。さてどう求めるかだが、ひとつの解、$x_1(t)$ が分かっているとき、もう一つの解は $x_2(t) = v(t)x_1(t)$ として、微分方程式に代入することによって求めることができる。 この場合は、$x_2 = v(t)e^{-t}$ なので、(31) で $a = 1$ とした式にこれを代入すると、

$$\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

したがって、$v(t) = C_0 t + C_1$ (ここで、 C_0, C_1 は定数)。よって、$x_2(t) = C_0 te^{-t}$ と書ける。一般解は、

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_0 te^{-t} \tag{35}$$

である。 それはともかく、ここで強調したいのは、**定数係数の微分方程式は、必ず、$e^{\lambda t}$ という形の解を持つ**ということである。

初期値問題

ここまでの話では、(25) のような 1 階の微分方程式であれば、定数が一つ [(26) の A]、(27) のような 2 階の微分方程式であれば、定数が二つ [(28) の A, B] 未定のままで残るが、それを $t = 0$ で条件を与えて、確定する問題を初期値問題という。未定の定数の数から明らかなように、1 階の微分方程式の場合は初期条件は一つ、2 階の微分方程式の場合は二つという風に、必要な条件の数は微分の階数に等しい。例えば、 $x(0) = 2$ を初期値とする (25) の解は、$x = 2e^t$ であり、$x(0) = 2, dx/dt|_{t=0} = 1$ を初期値とする (27) の解は、$x = \sin t + 2\cos t$ である。

発展： 前節の「発展」で取り上げた (31) を、$x(0) = 1, \quad dx/dt|_{t=0} = 0$ という条件の下に解いてみよう。$a \neq 1$ のとき、一般解は (33) なので、$C_1,\ C_2$ をこの初期条件を満足するように選ぶと、

$$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{a}{2\sqrt{a^2-1}}, \quad C_2 = \frac{1}{2} - \frac{a}{2\sqrt{a^2-1}}$$

であることが分かる。したがって、解は、

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-at}\left[\left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)e^{\sqrt{a^2-1}\ t} + \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)e^{-\sqrt{a^2-1}\ t}\right] \tag{36}$$

となる。$a^2 < 1$ の場合は、$\sqrt{a^2-1} = i\sqrt{1-a^2}$ なので、三角関数を使って、

$$x(t) = e^{-at}\left[\cos\sqrt{1-a^2}\ t + \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\sin\sqrt{1-a^2}\ t\right] \tag{37}$$

のように書き直すことができる。係数と初期値が実数なので、解も実数になる。この様に三角関数で表した方が解の性質は分かりやすい。

$a = 1$ の解は、一般解 (35) を用いて記すこともできるが、(36) もしくは、(37) で $a^2 \to 1$ の極限を取って求めることも可能である。$\sqrt{1-a^2}$ が十分に小さい時、$\sin\sqrt{1-a^2}\ t \simeq \sqrt{1-a^2}\ t,\ \cos\sqrt{1-a^2}\ t \simeq 1$ なので、(37) は

$$x(t) = e^{-t}\left[1 + t\right] \tag{38}$$

となる。要するに、$a = 1$ の時の一般解 (35) を知らなくても求まるということ。

非同次の方程式

微分方程式の右辺に t の関数がついている方程式、例えば、

$$\frac{dx}{dt} - ax = f(t), \qquad \text{ここで } a \text{ は定数} \tag{39}$$

のような式を非同次の式という。右辺が非同次の項である。また、これまで解き方を議論してきた $f(t) = 0$ の式を同次方程式という。$f(t)$ がある場合の一般的な解き方というものも存在する。例えば、1 階の常微分方程式 (39) の解を求めるときには、同次方程式の解が Ce^{-at} であることを用いて、(35) を求めた時と同様に、係数を t の関数、すなわち、$x = v(t)e^{-at}$ と置いて、これを (39) に代入して $v(t)$ を求めるという方法である。これを定数変化の方法という。この方法は 2 階以上の微分方程式にも拡張されているが、必答問題にこれまで出てきている微分方程式は、$f(t)$ が定数とか、t とか、$\sin t$ なので、この様な方法を知らなくても解ける。

まず、

$$\frac{dx}{dt} - ax = \sin bt, \qquad \text{ここで } a, b \text{ は定数} \tag{40}$$

を考えよう。この式の左辺は x と x の微分であり、それが右辺 $\sin bt$ に等しくなければならない。そのものもしくはその微分が sin となる関数としては sin, cos がある。そこで右辺を与える x (ここでは特解という意味で、x_p と書く) を

$$x_p(t) = A\sin bt + B\cos bt \qquad \text{ここで } A, B \text{ は定数}$$

の形に置いてみる。これを (40) に代入すると、

$$b(A\cos bt - B\sin bt) - a(A\sin bt + B\cos bt) = \sin bt$$

なので、

$$bA - aB = 0, \quad -bB - aA = 1$$

となり、これから A, B を求めれば、$x_p = -\dfrac{a}{a^2+b^2}\sin bt - \dfrac{b}{a^2+b^2}\cos bt$ が (40) を満足することが分かる。よって、一般解は、同時解を加えて、

$$x(t) = Ce^{at} - \frac{a}{a^2+b^2}\sin bt - \frac{b}{a^2+b^2}\cos bt$$

となる。

右辺が定数や t に比例する場合、

$$\frac{dx}{dt} - ax = b + ct, \qquad \text{ここで } a, b, c \text{ は定数} \tag{41}$$

も同じである。微分して、定数や t になるのは、t^n である。そこで、

$$x_p = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + \cdots$$

と置いてみよう。t の各次数毎に右辺と等しくならなければならないので、d_2 以降がゼロになるのはすぐ分かる。そして、$-ad_1 = c$、$d_1 - ad_0 = b$ が得られる。すなわち、

$$x_p(t) = -\frac{c}{a^2} - \frac{b}{a} - \frac{c}{a}t$$

となる。一般解は、

$$x(t) = Ce^{at} - \frac{c}{a^2} - \frac{b}{a} - \frac{c}{a}t$$

である。公式など知らなくてもこの程度の問題なら解けるのである。

発展：(39) で $f(t) = e^{bt}$ の場合には $x_p = Ae^{bt}$ を考えればよい。この時、$A(b-a) = 1$ より、$x = Ce^{at} + \dfrac{1}{b-a}e^{bt}$ となる。ここで、$b \neq a$ なら、これで良いが、$a = b$ だと特解が無限大に発散することになる。こういう場合は、te^{bt} の微分も e^{bt} を生み出すことを考慮し、特解を $x_p = Ae^{bt} + Bte^{bt}$ としておくという手がある。これを代入すれば、

$$\{(b-a)A + B\}e^{bt} - (b-a)tBe^{bt} = e^{bt}$$

となるので、$b = a$ であれば、$B = 1$、すなわち、$x_p = te^{bt}$ が特解である。また、$a \neq b$ なら $B = 0$ となる。もう一つの解き方としては、$a^2 = 1$ のときの (31) と同様に、

$$x_p = v(t)e^{at} \tag{42}$$

と置いてみればよい。代入すると $\dfrac{dv}{dt}e^{at} = e^{at}$ なので、 $\dfrac{dv}{dt} = 1$、すなわち、$v = t + C$。また、初期値問題の場合は、$a^2 = 1$ のときの (31) と同様、$a = b$ の解は極限をとることによって求めることも出来る。例えば、$x(0) = 1$ としたとき、$a \neq b$ の解は

$$x = \left(1 - \frac{1}{b-a}\right)e^{at} + \frac{1}{b-a}e^{bt} = e^{at} + \frac{1}{b-a}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$$

となるが、ここで、$b \to a$ の極限をとれば、

$$\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\left(e^{bt} - e^{at}\right) = \lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}e^{at}\left(e^{(b-a)t} - 1\right) = \lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}e^{at}\left(1 + (b-a)t + \frac{1}{2}(b-a)^2t^2 + \cdots - 1\right) = te^{at}$$

なので、 $x = e^{at} + te^{at}$ を得る。

2 階の常微分方程式の場合も 1 階の常微分方程式と同じようにすればよく、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + x = f(t) \tag{43}$$

のとき、右辺が定数や t に比例する場合、$f(t) = b + ct$ のときには、$x_p = d_0 + d_1t + d_2t^2 + d_3t^3 + \cdots$ と置いて、

$$x_p(t) = b - 2ac + ct$$

となる。 これに、同次方程式 (31) の解 ((33)-(35)) を加えたものが一般解となる。 また、$f(t) = \sin bt$ なら、$x_p = A\sin bt + B\cos bt$ と置いて、

$$x_p(t) = \frac{1-b^2}{(1-b^2)^2 + 4a^2b^2}\sin bt - \frac{2ab}{(1-b^2)^2 + 4a^2b^2}\cos bt$$

となる。なお、右辺が $\sin bt$ で、このような解き方をしたときに特解の振幅が無限大になるような場合には、上述の $f(t) = e^{bt}$ の場合と同様に、$t\sin bt$ の微分も $\sin bt$ の項を生み出すことを考慮して、$x_p = A\sin bt + B\cos bt + C\ t\sin bt$ 等と置いて特解を探せばよい。右辺が具体的な形をしていれば、こんな感じで大半の定係数の常微分方程式は解けることになる。

(なお、微分方程式を解いたときには、得た解を元の式に代入して、それを満足するかどうかチェックすることをお勧めする。)