2019年度入学試験 (2018年8月実施) 問題2

問1 【抵抗がある場での落下】

(a) 座標は下向きを正に取っているので、重力は正の方向へ加速させる。抵抗力は常に $|v|$ を小さくする方向 ($v > 0$ なら負、$v < 0$ なら正) なので、v の正負に依らず $-kv$ となる。したがって、運動方程式は、

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

となる。

(b) 落下し始めると重力により加速し、それとともに抵抗力も増大し、時間とともに右辺の2つの項の釣り合った速さ c に近づく。c は、$\dfrac{mg}{k}$ である。

(c) (a) の運動方程式の右辺は $-k(v - mg/k) = -k(v - c)$ と書き換えられる。c の時間微分はゼロなので、(a) の運動方程式は

$$m\frac{d}{dt}(v - c) = -k(v - c)$$

と書くことができる。これは定係数の微分方程式なので、$v - c = Ae^{\lambda t}$ の形の解を持つ。これを代入すると、$\lambda = -k/m.$ また、$t = 0$ で $v = 0$ なので、$A = -c.$ したがって、

$$v(t) = c(1 - e^{-kt/m}) \ .$$

【微分方程式の解き方はいろいろある。どのような解き方でも正しい答えに辿りつけるものであれば OK。】

問2 【円運動と角運動量保存】

(a) この円運動する物体の回転角速度は $\Omega = V/l$ である。穴の位置を原点とする (x, y) 座標を考える。物体の位置は、x 軸からの角度を θ とすると、$x = l\cos\theta,\ y = l\sin\theta$ と書ける。これの時間微分より、$\dfrac{d\theta}{dt} = \Omega$ であることを用いると、速度の x 成分と y 成分は、それぞれ、$v_x = -\Omega l \sin\theta = -\Omega y, \quad v_y = \Omega l \cos\theta = \Omega x$ となる。これらの微分より、加速度の x 成分と y 成分は、それぞれ、$a_x = -\Omega^2 l\cos\theta = -\Omega^2 x, \quad a_y = -\Omega^2 l \sin\theta = -\Omega^2 y$ となる。したがって、力は中心向きで大きさは $m\Omega^2 l = \dfrac{mV^2}{l}$ となる。この力が手から糸を通じて物体に加わえられており、逆に、作用反作用の法則より、これだけの力が糸を通じて物体から手にかかっていることになる。

(b) 質量 m の物体が速さ V で半径 l の円運動している場合の円の中心に対する角運動量の大きさは mVl である。この系には中心力しか働いていないので、糸の長さを変えても角運動量は保存する。したがって、糸の長さが $l/2$ になった時の物体の速さを V' とすると

$$mV'\frac{l}{2} = mVl$$

より、$V' = 2V$ となる。その間になされた仕事は運動エネルギーの差なので、

$$W = \frac{1}{2}mV'^2 - \frac{1}{2}mV^2 = \frac{3}{2}mV^2$$

となる。

【参考】仕事は力 $\times$ 距離である。この場合、力は中心力であるから中心力の方向にどれだけ移動したかで仕事は求められる。糸の長さが r の時の速さ $v(r)$ は、角運動量の保存より、$v(r) = Vl/r$ である。したがって、その時の中心力は $-mv^2/r = -mV^2l^2/r^3$ である (力は中心から遠ざかる方向を正としている)。よって、仕事は、

$$W = -\int_l^{l/2} mV^2l^2r^{-3}dr = \left[\frac{mV^2l^2}{2r^2}\right]_l^{l/2} = \frac{3mV^2}{2}$$

としても計算できる。

(c) 釘が出てきて糸の進行を妨げても、物体に働く力は張力のみであり、糸は伸縮しないので、張力の方向と運動の方向は直交することになる。したがって、物体の運動エネルギーは変化せず、それ故、速さも変化しない。速さは $2V$ のままである。釘から物体までの距離は $l/6$ なので、回転角速度は $12V/l$ となる。

問 3 初期の気体の温度を T_1, 上げた後を T_2 とし、その時の体積を V_1, V_2 とする。気体のする仕事 W は、圧力を p とすると $\int_{V_1}^{V_2} pdV$ である。この場合、圧力一定なので、

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p(V_2 - V_1)$$

となる。1 モルの理想気体の状態方程式より、$pV_1 = RT_1, pV_2 = RT_2$ なので、

$$W = p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1)\ .$$

となる。値 ($T_2 - T_1 = 100$ K、$R = 8.3$ J mol^{-1}K^{-1}) を入れると、830 J を得る。