# 2019 年度入学試験 (2018 年 8 月実施) 問題 1

**問 1** 【微分方程式】

(a) $ydy = x^3dx$ として、両辺を積分すればよい。積分すれば、

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}x^4 + C' \ .$$

ここで、$C'$ は積分定数。よって

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + C} \ .$$

ここで、$C$ は積分定数。

(b) 定係数の微分方程式なので $y = Ae^{\lambda x}$ の形の解を探す。これを与式に代入すると

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \ ,$$

を得る。よって、$\lambda = -3, \ 1$。 一般解は

$$y = Ae^{-3x} + Be^x \ .$$

境界条件より、$A = 1, \ B = 0$. したがって、

$$y = e^{-3x} \ .$$

**問 2** 【積分】

(a) 部分積分の問題である。

$$\begin{aligned} \int x \log x dx &= \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\log x\right) - \frac{x}{2} \right\} dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C \ . \end{aligned}$$

ここで、$C$ は積分定数。

(b) 積分の微分である。積分の微分は積分領域の端の微分とその場所での被積分関数の積プラス被積分関数の微分の積分となる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\int_0^{y^2}\left(e^{x^2} + e^{y^2}\right)dx &= \frac{dy^2}{dy}\left(e^{x^2} + e^{y^2}\right)\Big|_{x=y^2} + \int_0^{y^2}\frac{d}{dy}\left(e^{x^2} + e^{y^2}\right)dx \\ &= 2y\left(e^{y^4} + e^{y^2}\right) + \int_0^{y^2} 2ye^{y^2}dx \\ &= 2y\left(e^{y^4} + e^{y^2}\right) + 2y^3e^{y^2} \ . \end{aligned}$$

(イメージしやすくするために、例えば $y$ を時間だと思えば、右辺第 1 項は積分領域の端の移動に伴う積分の変化分になり、第 2 項は被積分関数が時間変化することによる積分の変化分になる。領域の端が時間変化するような場というのは、物理学では時折出てくる。また、$x$ のみに依存する部分の $y$ 微分はゼロであり、$y$ のみに依存する部分の $x$ 積分はその部分に $x = y^2$ を乗じたものになることに注意)

**問 3** 【ベクトル】

成分で考えるため、デカルト座標系 $(x, y, z)$ を導入する。$x, y, z$ それぞれの軸方向の単位ベクトル (基底ベクトル) を $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする。$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ である。$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ として、ひたすら解くことも可能であるが、ベクトルは座標の取り方に依らないので、例えば、$\boldsymbol{a}$ の方向に $z$ 軸をとっても一般性は失われない。ここでは、$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{k}$ として解く。

(a)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{a}\} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \{(a\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})a\boldsymbol{k}\} \\
&= \boldsymbol{\nabla} \cdot \{(a^2 z)\boldsymbol{k}\} \\
&= a^2 \left( \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \boldsymbol{k}z \\
&= a^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \ .
\end{aligned}$$

(最後に$\boldsymbol{a}$に戻すのを忘れないように。)

(b)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{r} \times a\boldsymbol{k}) \\
&= \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}x + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}y + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}z)a \\
&= \left( \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \times (-\boldsymbol{j}x + \boldsymbol{i}y)a \\
&= (-\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i})a = -2\boldsymbol{k}a = -2\boldsymbol{a} \ .
\end{aligned}$$

(最後に$\boldsymbol{a}$に戻すのを忘れないように。)

**問 4** 【複素数】

$\zeta$ 面上の原点を中心とする半径 $a$ の円上の点は $\zeta = ae^{i\theta}$ と書ける ($\theta$ が 0 から $2\pi$ まで変化すると円になる)。したがって、

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} = ae^{i\theta} + \frac{a^2}{ae^{i\theta}} = ae^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 2a\cos\theta \ .$$

これより、$\zeta$ 面上の原点を中心とする半径 $a$ の円は $z$ 面上では、$-2a$ から $2a$ の実軸上の直線になる。図は省略。

別解：$\zeta$ 面上の原点を中心とする半径 $a$ の円上の点は $|\ \zeta\ |^2 = a^2$ と書ける。また、$\zeta$ の複素共役 $\overline{\zeta}$ を用いると、$|\ \zeta\ |^2 = \zeta\overline{\zeta}$ である。したがって、

$$z = \zeta + \frac{|\ \zeta\ |^2}{\zeta} = \zeta + \overline{\zeta} = 2Re\{\ \zeta\ \}$$

となり、同じ結果を得る。ここで、$Re\{\ \zeta\ \}$ は $\zeta$ の実部を表す。