2018年度入学試験 (2017年8月実施) 問題1

問1 演算ルールを知っていれば解ける。$f = x^2 e^y \sin z$ なので、

(a)
$$\boldsymbol{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2xe^y \sin z, x^2 e^y \sin z, x^2 e^y \cos z)$$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -f$ であることに気づけば暗算で答が出る。

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla^2 f = 2e^y \sin z + f - f = 2e^y \sin z$$

問2

(a) 微分方程式である。微分方程式というのは、ある関数の階数の異なる微分が互いに打ち消し合ってゼロになるので、微分の階数が違っても複数の項が同じ x 依存性を持つことになる。微分しても形が変わらない関数が指数関数である。したがって、定係数の微分方程式は指数関数型の解 $y = Ae^{\lambda x}$ を持つ。これを代入すると

$$\lambda^2 Ae^{\lambda x} - 3\lambda Ae^{\lambda x} - 4Ae^{\lambda x} = 0$$

なので、$y = Ae^{\lambda x}$ が解であるためには、

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

を満足すればよい。したがって、$\lambda = -1,\ 4$。一般解は

$$y = Ae^{-x} + Be^{4x}$$

となる。ここで、A, B は任意の定数。

(b) 非同次の微分方程式であり、教科書的な解き方は、定数変化の方法である。右辺をゼロと置いた時の解 (同次解) は $y = Ce^x$ である。ここで、C を x の関数として、与式に代入すると

$$\frac{dC}{dx} e^x = \cos x$$

を得る。これより、

$$C = \int e^{-x} \cos x = A + \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x)$$

(ここで、A は定数) となり、解は、

$$y = Ae^x + \frac{1}{2} (\sin x - \cos x)$$

となる。積分がちょっと面倒かもしれないが、確実である。

なお、これ以外にも、右辺は $\cos x$ であり、左辺には y と y の微分があるので、$y = a\cos x + b\sin x$ という形の解が満足されることは明らかなので、これを与式に代入するという手もある。代入して、$\cos x, \sin x$ の係数を等しいとすれば、

$$a + b = 0, \quad b - a = 1$$

から a, b が求まるので、それに同次解 $y = Ae^x$ を加えて、

$$y = Ae^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

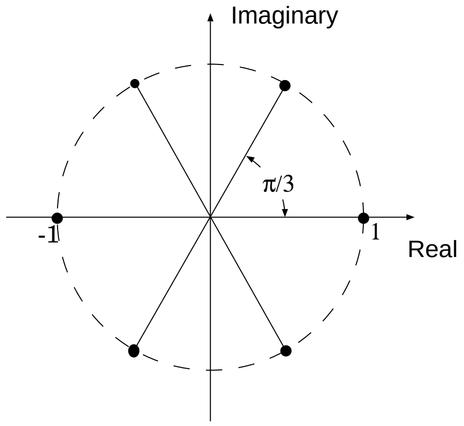
を得る。

問 3

$z^6 = 1$ を満足する複素数を z を求めなさいという問題であるが、これは複素数 z が $z = re^{i\theta}$ の形で表されることを知っていれば簡単である。$1 = e^{2in\pi}$（ここで、n は整数) なので、$r^6 e^{6i\theta} = e^{2in\pi}$ を満足する r と θ を求めればよい。すなわち、$r = 1,\ \theta = \dfrac{in\pi}{3}$。$n = 0$ から順番に入れていけば、図の黒丸が解であることが分かる。すなわち、

$$z = 1,\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。



問 4

定番の問題。固有値を λ、それに属する固有ベクトルを

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

と置こう。

$$\mathsf{A}\boldsymbol{R} = \lambda \boldsymbol{R}.$$

$r_1 = r_2 = 0$ でない場合には、

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

が満足されるので、それを解くことにより、$\lambda = 5,\ 9$ を得る。 $\lambda = 5$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり、 $\lambda = 9$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる。固有ベクトルは定数倍されていても正解である。