2017年度入学試験 (2016年8月実施) 問題2

1. 二本の紐で体重を支えているので、それぞれにかかる張力は、40kg 重である。従って、必要な力は 40kg 重、もしくは、40kg×9.8m s^{-2} =392 kg m s^{-2} = 392 N.

参考： エネルギーと仕事という概念で見る。この人を 1 m 持ち上げると、位置エネルギーは 80 kg ×9.8 m s^{-2}×1 m= 784 J 増加する. エネルギーの変化は為される仕事に等しい。仕事は力 × 距離である。この問題で必要な力は、392 N であるが、この人が自分を 1 m 持ち上げるためには 2 m 紐を手繰らなければならない。したがって、仕事は、392 N×2m= 784 J. このように、滑車や梃子を用いて、小さい力で重いものを動かすときには全て、この問題と同様に、力が小さい分を距離で補っている。

---

2. (a) E

   (b) 切り離し前の宇宙船と一緒に動く座標系での切り離し後の貨物室の速度を V、居住区の速度を v とすると、運動量の保存とエネルギーの保存は

$$mv + MV = 0, \qquad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = E$$

これらより、居住区の進行方向を正に取ると

$$v = \sqrt{\frac{2EM}{m(M+m)}}, \quad V = -\frac{m}{M}v$$

したがって、

$$v - V = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\sqrt{\frac{2EM}{m(M+m)}} = \sqrt{\frac{2E(M+m)}{Mm}}\ .$$

もしくは、V も解いて、

$$v - V = \sqrt{\frac{2EM}{m(M+m)}} + \sqrt{\frac{2Em}{M(M+m)}}\ .$$

参考： 上では、系の重心とともに動く座標系で考えたが、静止系で計算してももちろん同じである。系の重心の速度を $\boldsymbol{V}_0$, 切り離し後の居住区と貨物室の速度を、それぞれ、$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{V}$ とする。これらは空間 3 次元のベクトルである。その時、運動量の保存とエネルギーの式は、

$$m\boldsymbol{v} + M\boldsymbol{V} = (m+M)\boldsymbol{V}_0, \quad \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{1}{2}M|\boldsymbol{V}|^2 = \frac{1}{2}(m+M)|\boldsymbol{V}_0|^2 + E$$

エネルギーの式は、

$$\frac{1}{2}m(|\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{V}_0|^2) + \frac{1}{2}M(|\boldsymbol{V}|^2 - |\boldsymbol{V}_0|^2) = E$$

と書き直せる。運動量の式と $\boldsymbol{V}_0$ の内積を取ると、$m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}_0 + M\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}_0 = (m+M)|\boldsymbol{V}_0|^2$ となるが、これをエネルギーの式から引くと

$$\frac{1}{2}m(|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}_0|^2) + \frac{1}{2}M(|\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_0|^2) = E$$

を得る。運動量の式を

$$m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}_0) + M(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_0) = 0$$

と書き直す。これらは、$\boldsymbol{V}_0$ で動く系でのエネルギーの式と運動量の式で、この問題を解くのに用いた式と一致する。

---

3. (a) 容器内の気体は外部に対して仕事をし、内部エネルギーを失うので温度が下がる。

   (b) 温度 T_0 の外気が容器に流入すると、容器内の気体は外気によって仕事をされるから、容器内の気体の温度は上昇する。容器内の混合気体の温度は T_0 より高くなる。

   (c) 容器内にあった気体のモル数を n、容器に採取された外気のモル数を Δn とすると、状態方程式により

$$p_1V = nRT_0, \quad p_2V = (n+\Delta n)RT_0$$

   したがって、容器に採取された外気は

$$\Delta n = \frac{(p_2-p_1)V}{RT_0} \text{ モル}$$

参考： 上の (a), (b) に関して、理想気体の状態方程式、もしくは、ボイルシャルルの法則から、(a) に関しては圧力が下がるから温度が下がる、(b) に関しては圧力が上がるから温度が上がるという答案があったと採点者が嘆いていた。状態方程式は、

$$pv = nRT$$

である。ここで v は n モルの気体の占める体積である (通常は V と書くが、容器の体積と区別するため v とする)。状態方程式は n モルの気体を考えた場合には、この p, v, T の関係を示しているに過ぎない。(a) の場合、確かに、圧力は下がるが、v がどうなるかは状態方程式からはわからないので、pv の増減、すなわち、T の変化も分からない。それ故、エネルギー方程式 (熱力学の第 1 法則) が必要になる。また、温度は分子の運動エネルギーのマクロな表現 (気体のエネルギーに比例する) なので、気体が仕事をすれば、温度は変化する。

他方、分子の運動という見方をすると、圧力は分子による単位面積当りの押す力で、単位体積当りの気体分子の運動エネルギーに比例する。それ故、pv はエネルギーに比例する。気体の圧力が p_0 から p_1 に変化するときに、pv が一定となるように v が変化すれば、T は変化しない。しかし、実際には、$p_1 < p_0$ なら v の増加に伴い外の気体を押して外の気体に運動を与えるため、v の変化は小さく、他方、$p_1 > p_0$ なら、外部の気体に押されるため、v があまり小さくならない内に、p が p_1 になる。すなわち、v の変化は、何れの場合も、pv が一定の場合よりも小さく、それ故温度が変化する。外の気体を押したり外の気体に押されたりというのが、仕事をする (される) という事である。