2017年度入学試験 (2016年8月実施) 問題1

問1 ベクトル演算は、(x, y, z) 座標上での基本ベクトル (座標軸方向を向く単位ベクトル)$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 間の演算規則がわかっていれば解ける。

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

であり、

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1, \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}$$

である。(a) は面倒はない。(b),(c) に関しても労力を惜しまないとすれば、

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

として、頑張れば、答えは出てくる。答えは、

(a)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{r} = 3$$

(b)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) = 0$$

(c)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})\} = 2|\boldsymbol{a}|^2$$

となる。しかし、上の $\boldsymbol{a}$ を成分表示した時 (b) と (c) の計算は面倒なのでやりたくないのが人情である。(b) に関しては、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{r}$ と直交してるので、ベクトルを知っている人には、計算せずとも、ゼロであることが分かる。では (c) はどうするか。注意すべきは、$\boldsymbol{r}$ は 3 次元等方的であるという事。また、ベクトルは座標には依存しない。そこで、例えば z 方向を定ベクトル $\boldsymbol{a}$ の方向に選んでも一般性は失われない。そうすると、$\boldsymbol{a} = a_z\boldsymbol{k}$ なので、(b) は、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r} = a_zx\boldsymbol{j} - a_zy\boldsymbol{i}$ より、$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) = 0$ となる。ほとんど暗算で解ける。(c) に関しては、$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}) = a_z\boldsymbol{k}\times(a_zy\boldsymbol{i} - a_zx\boldsymbol{j}) = a_z^2(y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{i})$ なので、$\boldsymbol{\nabla}\cdot\{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})\} = 2a_z^2 = 2|\boldsymbol{a}|^2$ となる。なお、一般性を回復するために、a_z^2 を $|\boldsymbol{a}|^2$ に戻すことを忘れてはいけない。

問2

行列の中に虚数単位があるが気にせず解けばよい。固有値を λ、それに属する固有ベクトルを

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

と置こう。

$$\mathsf{A}\boldsymbol{R} = \lambda\boldsymbol{R}$$

を解くことにより、$\lambda = \pm 1$ を得る。 $\lambda = 1$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ となり、 $\lambda =$ − 1 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ となる。固有ベクトルは定数倍しても解である。

問 3

(a) 微分方程式である。微分方程式というのは、ある関数の階数の異なる微分が互いに打ち消し合ってゼロになるので、微分の階数が違っても複数の項が同じ t 依存性を持つことになる。微分しても形が変わらない関数が指数関数である。したがって、定係数の微分方程式は指数関数型の解 $x = Ae^{\lambda t}$ を持つ。これを代入すると $\lambda = -1$ なので、$x = Ae^{-t}$ が方程式を満足することが分かる。$t = 0$ で x $= 1$ より、

$$x = e^{-t}$$

が解。もちろん、$\frac{dx}{x} = -dt$ として、両辺を積分してもよい。

(b) いろいろな解き方があるが、もっとも知識が要らない方法は、この式の両辺を 2 回微分することである。2 回微分すると、右辺はゼロになり、(a) と同じ式になる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{d^2x}{dt^2} = 0\ ,$$

したがって、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Ae^{-t}\ .$$

これを積分すると答えに辿り着く。もうひとつの方法は定数変化の方法である。同時方程式の解を利用して、$x(t) = C(t)e^{-t}$ と置く。これを与式に代入すると、

$$\frac{dC}{dt} = 2te^{t}$$

を得る。$t = 0$ で $x = 0$ なので、$C(0) = 0$ である事に注意し、これを $t = 0$ から t まで積分する。

$$C(t) = \int_0^t 2te^t dt = [2te^t]_0^t - \int_0^t 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + 2$$

したがって、

$$x(t) = C(t)e^{-t} = 2t - 2 + 2e^{-t}$$

を得る。

問 4

(a) $|z-2| = |x-2+iy| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2)})$ である。したがって、$|z-2| = 2$ は $(x, y) = (2, 0))$ を中心とする半径 2 の円である。答えはその円の縁と内側という事。(図は省略)。

(b)

$$Re[z^2] = Re\left[(x+iy)^2\right] = Re\left[x^2 - y^2 + 2ixy\right] = x^2 - y^2$$

$x^2 - y^2 = 1$ は $(\pm 1, 0)$ を通過する双曲線である。したがって、$Re[z^2] \le 1$ は双曲線の内側 $x^2 \le y^2 + 1$ の領域という事になる。(図は省略)。