2015年度入学試験 (2014年8月実施) 問題2

問1

この問題と似た問題は、 2011年度入学試験 (2010年8月実施) に出題されている。力学の問題は、ニュートンの運動方程式を知っていれば原理的には解けるが、ニュートンの運動方程式から導かれる保存則である「力学的エネルギーの保存」や「運動量の保存」を用いると容易に解ける場合がある。最下点での質点の速度は水平成分のみであることに注意。質点の速度の水平成分を v、台の水平速度を V と書く。

(a) B点での質点の速さ v は、力学的エネルギーの保存より、$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ したがって、$v = \sqrt{2gh}$。

質点は最下点で最高速度を持つが、その後、左斜面を高さ h まで登り、そこで速度ゼロとなり、斜面を再び下り、右斜面を h の高さまで登る。これを繰り返すことになる。

(b) 質点と台の運動量の保存より、質点の速度の水平成分を v, 台の速度を V とすると $mv + mV = 0$. また、エネルギーの保存より、最下点では、速度の鉛直成分がゼロなので、$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mV^2 = mgh$. 両者を連立すると、

$$v = \sqrt{gh}.$$

次に、質点が最下点に来た時のB点の位置を求める。運動量の保存

$$m\frac{dx_B}{dt} + m\frac{dx_A}{dt} = 0$$

を時間で、$x_B = 0, x_A = X_A$ の初期時刻から $x_A = x_B$ となる時刻まで積分する。したがって、

$$x_B = \frac{1}{2}X_A\ .$$

(重心位置不変として求めても良い)

質点は最下点を過ぎた後は、左の斜面を登る。左の斜面を h まで登るとその速度はゼロになる。その間台は右に動き続け、質点が h の高さに到達した時点で速度ゼロとなる。その時のB点の x 座標は X_A。 その後、質点は左斜面を下り、それと同時に台は左に動き、質点は右斜面の高さ h のところまで登り、質点と台は初期の位置に戻り、そして、再び、質点は斜面を下り、台は右に動く、を繰り返す。

問2 間違っているもの、

(b) 理想気体の内部エネルギーは温度のみによるので、等温課程では内部エネルギーは変化しない。

(c) 低温の物体ほど波長の長い電磁波を出す。

(e) 対流には流体の存在が必要なので、真空中では生じない。

(f) 熱伝導は温度差がある場合のみに生じるので、この場合、熱は移動しない。

問 3

(a)　波長 $= 2\pi/q$, 周期 $= 2\pi/(qv)$,

波長とは、波の峰から峰、もしくは、谷から谷の距離である。すなわち、波が三角関数

$$u(x,t) = a\sin\left[q(x-vt)\right] \tag{1}$$

で表されているとき、qx が 2π 変化する距離という事である。したがって、波長を λ と書くと、λ は $q\lambda = 2\pi$ を満足するので、$\lambda = 2\pi/q$ となる。周期についても同様で、qvt が 2π 変化する時間である。よって、$2\pi/(qv)$。

(b)　波の位相が伝播する速さは v、 伝播する方向は、$+x$ 方向,

波の位相速度は、峰や谷が進む速度である。(1) の $u(x,t)$ では、時刻 t で $q(x-vt) = \pi/2$ を満足する x は峰の位置である。Δt 時間に峰が Δx 動いたとすると $q(x+\Delta x - v(t+\Delta t)) = \pi/2$ である。すなわち、

$$q(x+\Delta x - v(t+\Delta t)) = q(x-vt) = \pi/2$$

これより、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

となる。$v > 0$ なので、$+x$ 方向である。

(c)　n を正の整数 $(1,2,3,\cdots)$ とすると、波長 $= 2L/n$, 周期は $2L/(nv)$

$x = 0, L$ に固定端がある場合、$x = 0$ と $x = L$ の両方が節になる。したがって、図を書けば明らかなように、最も長い波は距離 L の中に $1/2$ 波長、その次の波は、1 波長、その次の波は $3/2$ 波長あることになり、$n = 1,2,3,\cdots$ とすれば、L は $n/2$ 波長であればよいことになる。したがって、波長は $2L/n$。周期は波長と周期の関係より、$2L/(nv)$ となる。

参考のため、定常波を出すところから書いておく。逆向きに伝播する波長と振幅が同じ 2 つの波が存在するとすれば、

$$u(x,t) = a\sin\left[q(x-vt)\right] + a\sin\left[q(x+vt)+\phi_0\right] \tag{2}$$

となる。ここで、ϕ_0 は両波の位相差である。$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ を用いると

$$u(x,t) = 2\sin\left(qx + \frac{\phi_0}{2}\right)\cos\left(qvt + \frac{\phi_0}{2}\right)$$

となる。$2\sin(qx + \frac{1}{2}\phi_0)$ という振幅で、時間的に振動するこの解を定常波の解という。$x = 0$ で $u = 0$ を満足する ϕ_0 は $2n\pi$ である (ここで、n は整数) ことが分かる。ここでは一般性は失わないので、$n = 0$ と置く。その時、$x = L$ で $u = 0$ となるためには、$qL = n\pi$。ここで、n は整数だが、$n = 0$ では、u は x によらず、常にゼロなので、解にはならない。また、負の n と同じ解は、正の n に存在するので、正の n のみを考えれば良い。それ故、波長は $2\pi/q = 2L/n$ となり、周期は、$2\pi/(qv) = 2L/(nv)$ となる。