2015 年度入学試験 (2014 年 8 月実施) 問題 1

問 1

(a) 部分積分の問題としてよく出題されるものである。ただし、部分積分せずとも解ける。

まずは、部分積分で解く。

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos bx\ dx &= \int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\right)+\frac{b}{a}e^{ax}\sin bx\right]dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\int \frac{b}{a}e^{ax}\sin bx\ dx + C \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx\right)-\frac{b^2}{a^2}e^{ax}\cos\ bx\right]dx + C' \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\ dx + C'
\end{aligned}$$

より、

$$\int e^{ax}\cos\ bx\ dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{az}\left[a\cos bx + b\sin bx\right] + C''$$

ここで、$C,\ C',\ C''$ は積分定数。

別解：

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ を用いれば、

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos\ bx\ dx &= \int \frac{1}{2}\left[e^{(a+ib)x}+e^{(a-ib)x}\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}+\frac{1}{a-ib}e^{(a-ib)x}\right]+C
\end{aligned}$$

となる。これでも答ではあるが、この形だとよくわからないので、分母を実数化して変形する。そうすると

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x}+\frac{a+ib}{a^2+b^2}e^{(a-ib)x}\right]+C \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\left[\frac{a}{2}(e^{ibx}+e^{-ibx})+\frac{b}{2i}(e^{ibx}-e^{-ibx})\right]+C \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\left[a\cos bx+b\sin bx\right]+C
\end{aligned}$$

となる。

(b) この形は変数変換して積分するのが普通である。ルートを含む積分は、その部分を他の変数に置き換えると解ける場合が多い。ここでは、$t=\sqrt{1+x}$ と置いてみる。すると、$x=t^2-1$ であり、$dx=2tdt$ となる。これらを用いると

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{1+x}\ dx &= \int 2(t^2-1)t^2 dt \\
&= \frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C \\
&= \frac{2}{5}(1+x)^{5/2}-\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}+C \qquad (1)
\end{aligned}$$

となる。

別解：
$t=\sqrt{1+x}$ と置くなんて思いつかないと言う人も居るかもしれない。しかし、そんな人も心配は要らない。$\int(1+x)^{1/2}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}+C$ という積分が出来る人なら、部分積分で解けることに気がつく。すなわち

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}\ dx &= \int\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x(1+x)^{3/2}\right)-\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]\ dx\\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2}-\frac{4}{15}(1+x)^{5/2}+C\end{aligned}$$

となる。これは (1) とはえらく違って見えるが、引き算をすると同じであることはすぐに分かる。

このように、$\int x^nF(x)dx$ で $F(x)$ を $n+1$ 回積分が出来るときには同じ手が常に使える (ここで n は正の整数)。

なお、不定積分の問題が出たときは、答を微分して被積分関数になるか、必ずチェックすることをお勧めする。

問 2

(a) 微分方程式である。微分方程式というのは、ある関数の階数の異なる微分が互いに打ち消し合ってゼロになるので、微分の階数が違っても複数の項が同じ x 依存性を持つことになる。微分しても形が変わらない関数が指数関数である。したがって、定係数の微分方程式は指数関数型の解 $y=Ae^{\lambda x}$ を持つ。これを代入すると

$$\lambda^2-\lambda-2=0$$

であれば、$y=Ae^{\lambda x}$ が解であることが分かる。この式を満足する λ は $2,-1$ なので、

$$y=Ae^{2x}+Be^{-x}$$

が一般解。ここで、$A,\ B$ は任意の定数である。

(b) いろいろな解き方があるが、もっとも知識が要らない方法は、この式の両辺を 3 回微分することである。3 回微分すると、右辺はゼロになり、(a) と同じ式になる。すなわち、

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)-2\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=0\ ,$$

したがって、

$$\frac{d^3y}{dx^3}=Ae^{2x}+Be^{-x}\ .$$

これを積分する。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}Ae^{2x}-Be^{-x}+C\ ,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}Ae^{2x}+Be^{-x}+Cx+D\ ,$$

$$y=\frac{1}{8}Ae^{2x}-Be^{-x}+\frac{1}{2}Cx^2+Dx+E\ . \tag{2}$$

ここで、C, D, E は積分定数。さて、これらを (b) 式に代入する。

$$\frac{1}{2}Ae^{2x}-Be^{-x}+C-\left(\frac{1}{4}Ae^{2x}+Be^{-x}+Cx+D\right)-2\left(\frac{1}{8}Ae^{2x}-Be^{-x}+\frac{1}{2}Cx^2+Dx+E\right)=4x^2\ .$$

これを整理すると

$$C-Cx-D-Cx^2-2Dx-2E=4x^2\ .$$

これが、x によらず成り立つためには、

$$C=-4,\ D=2,\ E=-3$$

となる。すなわち、

$$y=Ae^{2x}-Be^{-x}-2x^2+2x-3$$

と書ける。なお、ここで、A, B は任意なので、(2) の $\frac{1}{8}A$ を A に書き換えた。

問 3 ベクトル演算は、(x, y, z) 座標上での基本ベクトル (座標軸方向を向く単位ベクトル)$\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ 間の演算規則がわかっていれば解ける。

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

である。

(a)

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}z=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j},$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}) &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}) \\
&= -\frac{\partial y}{\partial x}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+\frac{\partial x}{\partial x}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}-\frac{\partial y}{\partial y}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+\frac{\partial x}{\partial y}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}-\frac{\partial y}{\partial z}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+\frac{\partial x}{\partial z}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}) &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}) \\
&= -\frac{\partial y}{\partial x}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+\frac{\partial x}{\partial x}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}-\frac{\partial y}{\partial y}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+\frac{\partial x}{\partial y}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}-\frac{\partial y}{\partial z}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+\frac{\partial x}{\partial z}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} \\
&= \frac{\partial x}{\partial x}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}-\frac{\partial y}{\partial y}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=2\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times(\phi\boldsymbol{k}) &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} \\
&= -\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{i} \\
&= (x\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{i})e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}$ という演算はベクトル $\boldsymbol{A}$ を z 軸の周りで反時計回りに 90 度回転させる操作である。それ故、ベクトル $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}$ を $x-y$ 面上で矢印を用いてプロットすると反時計回りの渦になる。ベクトルの渦巻きで、ぐるぐる回っているだけなので、増えも減りもしない。それ故、発散 $(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}))$ はゼロ。他方、$\boldsymbol{\nabla}\times$ はベクトル場の回転の強さと向きを表す演算である。$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}$ は z 軸の周りで反時計回り (正の回転) に一様に回転しているので、$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r})$ は z 軸方向を向く定ベクトルとなる。

問 4

(a) $|z-1| = |x-1+iy| = \sqrt{(x-1)^2+y^2)}$ である。したがって、$|z-1|=1$ は $(x,y)=(1,0))$ を中心とする半径 1 の円である。答えはその円の縁と内側という事。

(b)

$$|z^{-1}| = \left|\frac{1}{x+iy}\right| = \left|\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right| = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{|z|}\ .$$

よって $|z|\geq 1$. $|z|=1$ は原点を中心とする半径 1 の円である。したがって、その円の縁と外側という事になる。