2014年度入学試験 (2013年8月実施) 問題2

問1 バネによる振動の問題です。バネによる力はバネ定数とバネの長さの自然長からのズレの積で、バネの長さを自然長に戻す方向に働きます。

(a) 力は上向きを正に取る。物体に働く力は、重力と上のバネによる力と下のバネによる力。重力は $-mg$. 上のバネによる力は、伸びると上向きなので、$k_1(l_1' - l_1)$. 下のバネによる力は、伸びると下向きなので、$-k_2(l_2' - l_2)$. 釣り合いの式は、合力がゼロなので、

$$-mg + k_1(l_1' - l_1) - k_2(l_2' - l_2) = 0. \tag{1}$$

方向をしっかり抑えることが重要。

(b) 釣り合いの位置から、x だけ変位したとすると、上向きが正なので、上のバネの長さは $l_1' - x$、下のバネの長さは $l_2' + x$ となる。したがって、質点に働く力は、

$$F = -mg + k_1(l_1' - x - l_1) - k_2(l_2' + x - l_2) = -(k_1 + k_2)x. \tag{2}$$

ここで、(1) を用いた。質量 $\times$ 加速度 $=$ 力なので、質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x. \tag{3}$$

(c) (3) は三角関数を解に持つ。一般解は

$$x(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t \tag{4}$$

の形に書ける (微分方程式の解き方に関しては「必答問題の解答と解説・数学編」参照)。これを (3) に代入すると

$$-m\omega^2(a\sin\omega t + b\cos\omega t) = -(k_1 + k_2)(a\sin\omega t + b\cos\omega t)$$

となるので、$m\omega^2 = (k_1 + k_2)$. ωt が 2π 変化すると1周期なので、周期 T は $|\omega|T = 2\pi$ を満足する。すなわち、

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}\ . \tag{5}$$

問2 この問題は、運動エネルギーの熱への変換、また、運動量の保存を問うています。なお、この問題のように、数値が与えられていると、最初から数値を用いて解こうとする人がいますが、それは多くの場合、間違いの元になり、得策ではありません。ここでは、弾丸の質量を m、初速度を v_1、比熱を C、温度変化量を δT、木片の質量を M、弾丸が衝突した後の木片の速度を V として扱います。

(a) サンドバッグに当たって弾丸が止まった場合、弾丸の運動エネルギーは全て熱エネルギーに変換する。この時、弾丸のみの温度が上がるとしているので、

$$mC\Delta T = \frac{1}{2}mv_1^2$$

より、

$$\Delta T = \frac{v_1^2}{2C} = \frac{100^2\mathrm{m}^2}{2\times 125\mathrm{m}^2/\mathrm{K}} = 40^\circ\mathrm{K}$$

となる。なお、$\mathrm{J} = \mathrm{kg\ m}^2/\mathrm{s}^2$ である。

(b) 木片は衝突後弾丸と一緒に運動するので、弾丸と木片の運動量の和は保存するとして、

$$(m+M)V = mv_1$$

なので、衝突後の速さは

$$V = \frac{m}{m+M}v_1 = \frac{0.01kg}{0.1kg} \times 100\mathrm{m/s} = 10\mathrm{m/s}$$

となる。次に、エネルギーの式は、

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 + mC\Delta T = \frac{1}{2}mv_1^2$$

なので、ΔT は

$$\Delta T = \frac{1}{2C}\left\{v_1^2 - \frac{m+M}{m}V^2\right\} = \frac{v_1^2}{2C}\left\{1 - \frac{m}{m+M}\right\} = 40\mathrm{K} \times 0.9 = 36\mathrm{K}\ .$$

問 3 剛体滑車の問題です。剛体の慣性モーメントは角運動量概念の具体化です。慣性モーメントを I、角速度を ω としたとき、角運動量は $I\omega$ です。トルクを N とすると

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = N$$

となります。通常は I は一定なので

$$I\frac{d\omega}{dt} = N$$

と書きます。

(a) 時間を t、おもりの速度を v とし、上向きを正とする。おもりに働く力は重力 $-mg$ と張力 T なので、

$$m\frac{dv}{dt} = T - mg\ .$$

(b) 張力によるトルクは rT なので、

$$I\frac{d\omega}{dt} = rT\ .$$

ここで、ω は rT によって回転する方向を正としている。

(c) (a) で得た式と (b) で得た式から T を消去すると、

$$I\frac{d\omega}{dt} = mr\frac{dv}{dt} + mgr\ .$$

他方、v と ω の関係は $r\omega = -v$ である。なお、下向き v のとき $(v<0)$ に $\omega>0$ と定義したのでマイナスがついている。これを上式に代入すれば、

$$(I + mr^2)\frac{dv}{dt} = -mgr^2$$

で、$I = \frac{1}{2}Mr^2$ を代入すると加速度は

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{2mg}{M+2m}$$

となる。加速度の大きさ a とすると

$$a = \frac{2mg}{M+2m}\ .$$

おもりの運動方程式より、張力は

$$T = m\frac{dv}{dt} + mg = m(g-a) = \frac{Mmg}{M+2m}$$

となる。