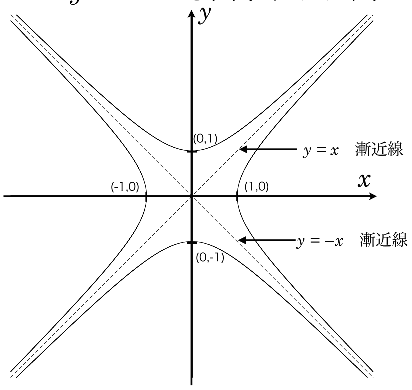
2014 年度入学試験 (2013 年 8 月実施) 問題 1

問 1 与えられた 2 次元の関数 $f(x,y)$ の等値線を描き、また、∇f をベクトル表記してみようという問題です。例えば、天気予報で出てくる天気図には等圧線が引かれていますが、気圧分布が $f(x,y)$ で与えられていると思えば、$f(x,y)=$ 一定 の線は等圧線であり、∇f は気圧が変化する方向とその傾きの大きさを表すことになります。

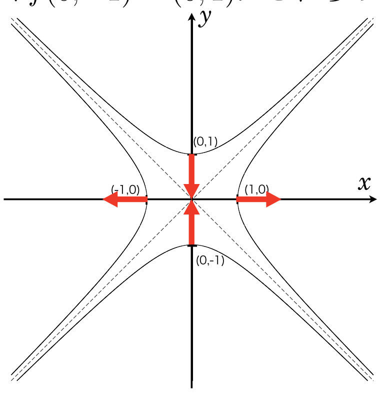
(a) $f(1,0)=\frac{1}{2}$, $f(-1,0)=\frac{1}{2}$, $f(0,1)=-\frac{1}{2}$, $f(0,-1)=-\frac{1}{2}$ となるので，$x^2-y^2=1$ と $x^2-y^2=-1$ を図示すれば良い．



図中の曲線は $y=\pm\sqrt{(x^2-1)}$ と $y=\pm\sqrt{(x^2+1)}$ の双曲線.
$x\to\infty$ で、$y=\pm x$ になることに気がつけば、図を描くのは簡単。

(b)

$\frac{\partial f}{\partial x}=x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-y$ なので，$\nabla f(1,0)=(1,0)$，$\nabla f(-1,0)=(-1,0)$，$\nabla f(0,1)=(0,-1)$，$\nabla f(0,-1)=(0,1)$．これらのベクトルを題意の通り図示すると，下図の赤矢印のようになる．



(c)

$\nabla\cdot(\nabla f)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})=0$
これは、「発散」とは何かを知っているかどうかだけの問題。

問 2 微分方程式の一般解を求める問題です。微分方程式に慣れておくことは重要です。いろいろな状況に適用できる方法というのを授業では習いますが、そういうのを覚えていなくても、大体は解けます。

(a) $(1-x)\frac{dy}{dx}+y=0$
1 階の状微分方程式は、右辺を y のみの関数、左辺を x のみの関数という風にできれば、

両辺をそれぞれ積分すれば解ける。この問題はその典型。すなわち、

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$$

として、両辺を積分して

$$\ln y = \ln{(x-1)} + C', \quad C' \text{は定数}$$

$C' = \ln C$ と置くと $\ln y = \ln[C(x-1)]$ となり、ln の中が等しくなければいけないので、

$$y = C(x-1)$$

(b) $\frac{dy}{dx} + y = x$

どのように解いても良いが、ここでは (「必答問題の解答と解説・数学編」にある) 教科書風ではない解き方を記しておく。まず重要なのは、定係数の同次の微分方程式は指数関数型の解を持つという事である ($\sum_{n=0}^{N} a_n d^n y/dx^n = 0$ は $y = Ce^{-\lambda x}$ の形の解を持つ。ただし、a_n は定数)。これは、指数関数が微分しても形を変えない関数であることから当然である。さて、ここでの問題を解くには右辺 (非同次項) を何とかしなければいけない。そこで、試しに、$z = y - x$ と置いてみよう。すると、

$$\frac{dz}{dx} + z + 1 = 0$$

となる。次に、$w = z + 1$ と置いてみよう。すると

$$\frac{dw}{dx} + w = 0$$

したがって、　$w = Ce^{-x}$。ここで、C は定数。これより、z は $z = Ce^{-x} - 1$。$y = z + x$ なので、

$$y = Ce^{-x} + x - 1$$

である。もちろん、定数変化の方法で解を探すのが普通ではある ($y = C'(x)e^{-x}$ を代入すると、$\dfrac{dC'}{dx}e^{-x} = x$ となるので、積分して C' が求まる)。

(c) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$

この問題も定数変化の方法で解けば良い (右辺がゼロの時の解は $y = Ce^{-2x}$ なので、$y = C'(x)e^{-2x}$ を代入して、$C'(x)$ の式を出して、C' を求めればよい) が、ここでは、また、教科書風でない解き方を示す。

指数関数型の解は微分しても形が変わらない。したがって、定係数の微分方程式の非同次項が指数関数型の場合、その形の解が非同次項を満足すると期待できる (右辺が同次解と同じ関数を含む時は除く)。すなわち、特解を y_p とするとき、$y_p = Ae^{3x}$ の形を探す。代入すると、

$$3Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x}$$

なので、$y_p = \frac{1}{5}e^{3x}$ となる。同次解は Ce^{-2x} なので、解は、

$$y = \frac{1}{5}e^{3x} + Ce^{-2x} \qquad \text{ここで、} C \text{ は定数}$$

である。

問 3 関数がどのような形をしているかを理解できることは重要です。なお、以下の (a) の関数は、大気海洋で重要なロスビー波の分散関係と同じ形です。

(a) 関数

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

の最大値と最小値を求め、$y = f(x)$ を図示する。

$f(x)$ は連続関数なので、極値および $x \to \pm\infty$ の極限における値を求めれば、最大値と最小値を求められる。極値は導関数が 0 になる時の値なので、$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求める。$1/(x^2+1) = (x^2+1)^{-1}$ に留意すると、

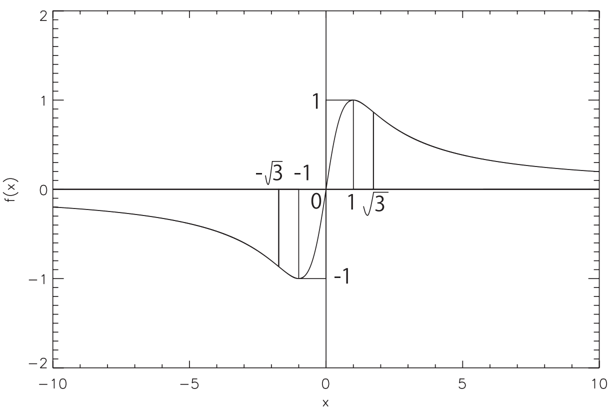
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x^2+1)^{-1} + 2x\left[-(x^2+1)^{-2}2x\right] && (1) \\ &= \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}. && (2) \end{aligned}$$

したがって、$x = \pm 1$ で極値となり、そのとき $x = \pm 1$ である。一方、$x \to \pm\infty$ で、$f(x) \to 0$ に漸近する。よって、最大値は $f(1) = 1$、最小値は $f(-1) = -1$。

図示のため、$f'(x)$ の符号を含めて上記の内容をまとめると下表のようになる。

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f(x)$	0	減少	-1	増加	1	減少	0
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

したがって、下のように図示される。



なお、そこまでは要求していないが、より正確に図示するには、2 階導関数 $f''(x)$ から変曲点および曲線が上に凸か凹かも調べればよい。

$$f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}. \tag{3}$$

変曲点等も含めると下表のようになる。

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		∞
$f(x)$	0	減凸	変曲点	減凹	-1	増凹	0 変曲点	増凸	1	減凸	変曲点	減凹	0
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0

(b) 関数

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

について、極限

$$\lim_{x\to+0} f(x),\quad \lim_{x\to-0} f(x)$$

をそれぞれ求め、$y = f(x)$ を図示する。

先ず、極限を求める。$x \to \pm 0$ で $\dfrac{1}{x} \to \pm\infty$ なので、

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-0} f(x) = 0.$$

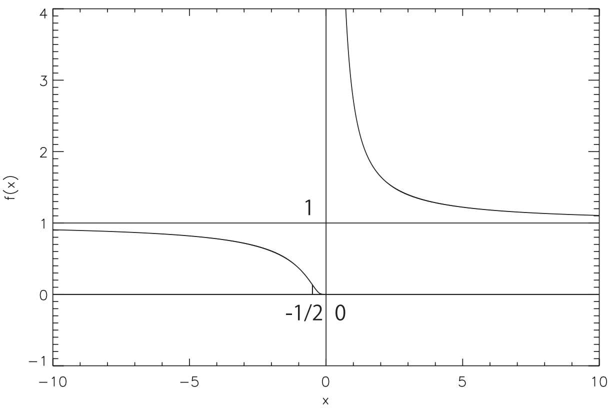
次に図を考える。$f(x)$ は、$x = 0$ で不連続、それ以外では連続な関数である。$f(x)$ の増加・減少を調べるため 1 階導関数を求めると、

$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) < 0 \quad (x \neq 0). \tag{4}$$

一方、極限 $x \to \pm\infty$ では、$1/x \to \pm 0$ より、$f(x)$ は 1 に漸近する。以上をまとめて $f(x)$ の増減と主な値を示すと下表となる。

x	$-\infty$		-0	$+0$		∞
$f(x)$	1	減小	0	∞	減少	1
$f'(x)$	0	$-$			$-$	0

よって、下のように図示される。



なお、より正確に図示するため 2 階導関数 $f''(x)$ を調べると、

$$f''(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1+2x}{x^4}. \tag{5}$$

したがって、$x = -1/2$ に変曲点を持ち、$x < -1/2$ で上に凸、$x > -1/2$ で上に凹となる。以上をまとめると下表のようになる。(ただし、ここまでやることは要求していない)。

x	$-\infty$		$-1/2$		-0	$+0$		∞
$f(x)$	1	減小 凸	変曲点	減少 凹	0	∞	減少 凹	1
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$			$-$	0
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$			$+$	0