2013年度入学試験 (2012年8月実施) 問題1

問1 ベクトルの計算は (x, y, z) 座標で成分に分ければ、後は、演算規則さえ知っていれば答に辿り着きます。

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

と置きましょう。

(a) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a} = (a_x x + a_y y + a_z z)(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})$ なので、

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}\} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[(a_x x + a_y y + a_z z)a_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(a_x x + a_y y + a_z z)a_y\right] && (1)\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left[(a_x x + a_y y + a_z z)a_z\right] && (2)\\
&= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\boldsymbol{a}|^2
\end{aligned}$$

(b) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}) = (b_y z - b_z y)a_x + (b_z x - b_x z)a_y + (b_x y - b_y x)a_z$ なので、

$$\nabla\{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r})\} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

問2 定係数の常微分方程式の初期値問題。微分しても形が変わらない関数が指数関数です。それ故、定係数の微分方程式は通常、$e^{\lambda t}$ の形の解を持ちます (特殊な状況では、$te^{\lambda t}$ のような形の解もありますが)。したがって、まずその形の解を探すのが得策です。他方、定数の非同次項がついている場合、従属変数を変形すれば、非同次項は消すことが出来ます。

(1) $\dfrac{dx}{dt} + 2x = 1, \qquad x(0) = 0$

$y = x - \frac{1}{2}$ と置くと

$\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0, \qquad y(0) = -\dfrac{1}{2}$ なので、$e^{\lambda t}$ の形の解を考えると、$y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}$. したがって、

$$x(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} + 1)$$

(多くの人は、定数変化の方法で解きますが、もちろんそれでも構いません。)

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} = 2x, \qquad x(0) = 1, \quad \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$

$x = e^{\lambda t}$ を代入すると、特性方程式は、$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ となり、λ は、2 と -1 となる。したがって、一般解は $x(t) = ae^{2t} + be^{-t}$. 初期条件を代入すると、

$$x = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

問3 A が行列、$\boldsymbol{R}$ がベクトルの時、の時、A$\boldsymbol{R} = \lambda\boldsymbol{R}$ を満足する λ が固有値で、$\boldsymbol{R}$ は固有値に属する固有ベクトル。この時、

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

です。この式は

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0$$

となり、この式の解が自明でない解 ($r_1 = r_2 = r_3 = 0$ 以外の解) を持つための条件は、A の行列式がゼロ、すなわち、

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

なので、$\lambda^2(2-\lambda) - (2-\lambda) = 0$ となり、固有値は、$\lambda = 2, 1, -1$ です。それぞれの固有値に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

固有ベクトルはそれが定数倍されていても正解です。

問 4 log の定義を知っていれば解ける問題です。

$$z = e^{(2+i\frac{\pi}{6})} = e^2 e^{i\frac{\pi}{6}} = e^2 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^2 + i \frac{1}{2} e^2$$

問 5 部分積分を行います。

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \int_0^\infty \left\{ \frac{d}{dx}[-x^n e^{-x}] + n x^{n-1} e^{-x} \right\} dx \\ &= [-x^n e^{-x}]_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1} \end{aligned} \tag{3}$$

したがって、

$$I_n = n!\ I_0 = n! \int_0^\infty e^{-x} dx = n!\ .$$