2012 年度入学試験 (2011 年 8 月実施) 問題 1

問 1　定積分の基礎的問題

(1) $\dfrac{1}{x(1+x)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x}$ を用います。(定番の積分)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x)}\ dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) = \left[\ln \frac{x}{1+x}\right]_1^\infty = \ln 2$$

(2) $\cos x = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ を用いるか、部分積分を行います。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\ \cos x\ dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{(i-1)x} + e^{-(1+i)x}\right)\ dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{i-1}e^{(i-1)x} - \frac{1}{i+1}e^{-(1+i)x}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

部分積分なら、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\ \cos x\ dx &= \int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\ \cos x\right)\ dx - \int_0^\infty e^{-x}\ \sin x\ dx \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\ \cos x\right)\ dx - \int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\ \sin x\right)\ dx \\ &\quad - \int_0^\infty e^{-x}\ \cos x\ dx\end{aligned}$$

より、

$$\int_0^\infty e^{-x}\ \cos x\ dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\ \cos x\right)\ dx - \int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\ \sin x\right)\ dx\right] = \frac{1}{2}$$

問 2 定係数の常微分方程式の初期値問題。微分しても形が変わらない関数が指数関数です。それ故、定係数の微分方程式は通常、$e^{\lambda t}$ の形の解を持ちます (特殊な状況では、$te^{\lambda t}$ のような形の解もありますが)。したがって、まずその形の解を探すのが得策です。他方、$e^{\alpha t}$ という非同次項がついている場合、微分してそれになるのが非同次解 (特解) なので、特解は、通常は、非同次項と同じ $e^{\alpha t}$ の形をしています (この解が同次方程式の解の場合には、$te^{\alpha t}$ の形などが特解になります。これの微分も非同次項の形を生み出します)。

(1) $\quad \dfrac{dx}{dt} + x = e^t, \qquad x(0) = 0$

右辺をゼロとしたときの同次解は $x_h = Ae^{-t}$ の形をしています。非同次方程式の特解は右辺の形を代入すれば、$x_p = \frac{1}{2}e^t$ であることが分かります。初期条件より、$x = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$
多くの人は、定数変化の方法で解きますが、もちろんそれでも構いません。

(2) $\quad \dfrac{dx}{dt} + \displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau = e^t, \qquad x(0) = 0$

積分があるので、一度微分すると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = e^t$$

初期条件は、$x(0) = 0$ と (与えられた微分方程式で $t = 0$ と置くことにより得られる)$dx/dt|_{t=0} = 1$ です。右辺をゼロとしたときの同次解は $e^{\alpha t}$ を代入し、$\alpha = \pm i$、したがって、$x_h = A\cos t + B\sin t$。 非同次方程式の特解は右辺の形を代入して、$x_p = \frac{1}{2}e^t$. 初期条件より、

$$x = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^t)$$

問 3 位置ベクトル$\boldsymbol{r}$は直交直線座標系 (x, y, z) で表現すると、その座標 (x, y, z) です。また、ベクトルは座標のとり方にはよらないので、z 座標を $\boldsymbol{k}$ と平行にとっても一般性は失われません。そこで直交直線座標系 (x, y, z) で z 座標を $\boldsymbol{k}$ と平行にとり、x, y 方向の単位ベクトルを、それぞれ、$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$と書くと、$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ となり、これを用いると、

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$|\boldsymbol{u}| = |-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\boldsymbol{r}|$$

後は、規則にしたがって間違わないように計算すればよいだけです。

(1) $$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \left(-\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = 1$$

(2) $$\nabla \times \boldsymbol{u} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \left(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}\frac{\partial x}{\partial x} - \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}\frac{\partial y}{\partial y}\right) = 2\boldsymbol{k}$$

(3) $$\nabla|\boldsymbol{u}| = \nabla|\boldsymbol{r}| = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}|^{-1}\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

(4) $$\nabla^2|\boldsymbol{u}| = \nabla \cdot \nabla|\boldsymbol{r}| = \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right) = \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} - \frac{\nabla|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{r}|^2} \cdot \boldsymbol{r} = \frac{3}{|\boldsymbol{r}|} - \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} = \frac{2}{|\boldsymbol{r}|}$$

問 4 3 行 3 列の行列 A によるベクトルの変換、$\boldsymbol{y} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$. ベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分を x_i, $\boldsymbol{y}$ の成分を y_i, A の成分を a_{ij} $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ と書くと

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

です。

(1) $\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$が原点に対して対称というのは、$y_1 = -x_1, y_2 = -x_2, y_3 = -x_3$ のことなので、

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$が直交するということは、内積 (スカラー積) がゼロ、すなわち、

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + (a_{31} + a_{13})x_3x_1 = 0.$$

したがって、条件は、$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0, a_{12} + a_{21} = a_{23} + a_{32} = a_{31} + a_{13} = 0$ となります。まとめて書くと、

$$a_{ij} + a_{ji} = 0.$$

(ただし、全ての a_{ij} がゼロの場合を除きます)。