2011年度入学試験 (2010年8月実施) 問題2 解答例

問1: 滑り台を滑り降りたとき、質点の速度は水平成分のみであることに注意。質点の水平速度を v、滑り台の水平速度を V と書く。

(a) 力学的エネルギーの保存、$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$、より、質点の速さ $|v|$ は $|v| = \sqrt{2gh}$

(b) 滑り台は右に動く。
解答例 1):質点は左向きに動くが、最初ゼロであった運動量の水平成分はゼロのままでなければいけないから。
解答例 2):質点が斜面を下るとき、滑り台の斜面から垂直抗力を受ける。この質点に働く垂直抗力の反作用として、滑り台は質点から右向きの力を受けるから。

(c) 質点が滑り降りたときの質点と滑り台のもつ運動エネルギーは最初に質点が持っていた位置エネルギーに等しい。また、系の運動量の水平成分は保存する。
$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = mgh$, $mv + MV = 0$ より、$V = \sqrt{\dfrac{2m^2gh}{M(M+m)}}$

問2: 回転軸から床までの距離を R、回転角速度 Ω、この人工重力の下で生活している人の質量を m と書く。

(a) $\Omega^2 R = 10\mathrm{m/s^2}$、$R = 40\mathrm{m}$ より、$\Omega =$0.5 rad/s

(b) 回転軸の周りの角運動量は、$m\Omega R^2 = 50 \times 0.5 \times 40^2 = 40000\mathrm{kg\ m^2/s}$.

(c) 回転の方向。
解答例 1）中央に向かうので角運動量の保存より回転方向の速度が増大し、着地点は回転の方向にずれる。
解答例 2) 回転方向を反時計回りとするとコリオリ力により右に曲げられる。時計回りとすれば左に曲げられる。何れにせよ、着地点は回転方向にずれる。
解答例 3）鉛直上向きにジャンプし着地する動作を宇宙ステーションの外から見ると、回転の接線成分とジャンプによるその直角方向の成分をもつ速度で直線運動し床面に再衝突するように見える。このときの速さは床面の回転による速さより大きく、また、到達する床までの距離は円周に沿う距離よりも短いので、再衝突点は回転方向にずれることになる。(図2－1)

(参考)
この宇宙ステーションで垂直にジャンプしたとき、実際にどれぐらいずれるのか計算してみよう。考え方は上の解答例3に従う。

ジャンプの鉛直初期速度を v とすると、水平速度成分は ΩR なので、図2－1の角度 θ は $\tan\theta = v/\Omega R$ により決まる。また、ステーションの外から見たときのこの人の移動する速さは $\sqrt{\Omega^2 R^2 + v^2}$ である。他方、ジャンプ地点 P から降下地点 Q までのステーションの外から見たときの直線距離 L_D は $L_D = 2R\sin\theta$。したがって、その距離を移動するのに要する時間 T は $L_D/\sqrt{\Omega^2 R^2 + v^2}$。この着地地点まで円弧に沿って測った距離 L_c は、$L_c = 2R\theta$。他方、この時間にステーションの回転により移動する円弧に沿った距離は $R\Omega T$。

宇宙ステーションの床にただ立っていれば、T の時間で、$R\Omega T$ 移動し、ジャンプすれば、円弧にそう距離としては L_c 移動するので、その差、$L_c - R\Omega T$ がジャンプ地点と着地地点の違

いを表す。ここでは計算を楽にするため、垂直跳び 80cm の人を考える。重力加速度 $10\mathrm{m/s}^2$ の下で 80cm ジャンプするための上向き初速度 v は、4m/s である。この値を用いると、$\theta = 0.197\mathrm{rad}$, $L_D = 15.69\mathrm{m}$, $L_c = 15.79\mathrm{m}$, $T = 0.769\mathrm{s}$, $R\Omega T = 15.38\mathrm{m}$ で、求める差は、約 40cm となる。それなりに大きくずれることが分かる。

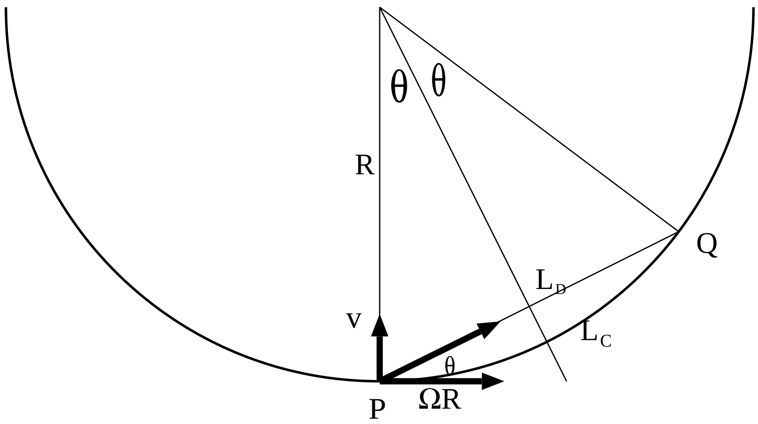

図 2-1：宇宙ステーションの中の人が、鉛直上方に初速度 v でジャンプした時、宇宙ステーションの外からはどう見えるかという図。　P 点でジャンプし、Q 点に着地。P 点と Q 点の直線距離を L_D、円弧に沿う距離を L_C。

問 3:

(a) 状態方程式 $pV = nRT(p = 10^5\mathrm{N/m}^2, n = 1, R = 8.31\mathrm{J/[mol\cdot K]})$ より、大気中での体積は $V_1 = 8.31 \times 300/10^5 = 2.5 \times 10^{-2}\mathrm{m}^3$

(b) $10^5\mathrm{N/m}^2 + 1000\mathrm{kg/m}^3 \times 10\mathrm{m/s}^2 \times 90\mathrm{m} = 10^6\mathrm{N/m}^2 = 10^4\mathrm{hPa}.$

(c) 水深 90m での体積は、$V_2 = 2.5 \times 10^{-3}\mathrm{m}^3$。この体積の減少に際して、温度は変わらないので、内部エネルギーは変わらない。したがって、熱力学の第一法則より、得る熱量と気体のする仕事が等しい (気体がされる仕事と放出する熱量が等しい)

$$0 = d'Q - pdV$$

$p = RT/V$ を代入して、$V_1 = 2.5 \times 10^{-2}\mathrm{m}^3$ から $V_2 = 2.5 \times 10^{-3}\mathrm{m}^3$ まで積分すればよい。
$Q = \int_{V_1}^{V_2} pdV = RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = RT\log_e\frac{V_2}{V_1} = -RT\log_e 10 = -5.7 \times 10^3\mathrm{J}$
マイナスなので、 $5.7 \times 10^3\mathrm{J}$ の熱を気体は放出することになる。