# 2011 年度入学試験 (2010 年 8 月実施) 問題 1 解答例

**問 1:** デカルト座標で成分表示して解くのが簡便。$x$ 軸, $y$ 軸, $z$ 軸、各方向の単位ベクトル (基本ベクトル) を $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ と表記すれば、

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

で、$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 間のスカラー積とベクトル積の規則さえ知っていれば、後は通常の微分と同じ。

(a) $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ なので、
$\nabla r = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2+y^2+z^2) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$

(b) $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = 3$

(c) $\nabla \times \boldsymbol{r} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = 0$

(d) $\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^n} = \left(\nabla\frac{1}{r^n}\right)\cdot\boldsymbol{r} + \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{r}}{r^n} = -nr^{-n-1}\nabla r\cdot\boldsymbol{r} + \frac{3}{r^n} = \frac{3-n}{r^n}$

**問 2:** 行列を A, 固有値を $\lambda$, 固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ と書くと、

$$\mathsf{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$

の関係がある。

$$(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E})\,\boldsymbol{u} = 0 \qquad (\text{ここで E は単位行列})$$

より、行列式 $|\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E}| = 0$ を固有値は満足する。この問題では、

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

なので、行列式の計算をすれば、

$$-\lambda(1-\lambda)^2 - (1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$$

となり、その解は、$\lambda = 2, 1, -1$ である。

固有ベクトルは

$$(1-\lambda)u_1 + u_2 = 0, \quad u_1 - \lambda u_2 + u_3 = 0, \quad u_2 + (1-\lambda)u_3 = 0$$

を満足するので、$\lambda = 2, 1, -1$、それぞれに対応する固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

となる。なお、ここでは、固有ベクトルは $|\boldsymbol{u}| = 1$ となるように規格化しているが、規格化していないくとも正答である。

**問 3:**

(a) $\dfrac{dx}{dt} + x = 1, \quad x(0) = 0$

解答例 1)　$x = 1$ を代入すると、左辺は 1 になる。したがって、$x = 1$ は特解である。同次解 (右辺がゼロの方程式の解) は定数係数の微分方程式なので、$c\ e^{bt}$ の形をしている (ここで、$b,\ c$ は定数)。この解の形を同次方程式に代入すると、$b = -1$ であることが分かる。したがって、この同次解と特解の和、$x = 1 + ce^{-t}$ がこの微分方程式を満足することは明らか。初期条件 ($x(0) = 0$) を満足する $c$ は $c = -1$ なので、

$$x(t) = 1 - e^{-t}$$

が解。

解答例 2)　両辺を微分する。その方程式の一般解は、$dx/dt = ae^{-t}$ となる。$x(0) = 0$ より $dx/dt|_{t=0} = 1$ なので、$a = 1$。これを $t = 0$ から $t$ まで積分し、$x(0) = 0$ の条件を用いる。

(b) $\dfrac{dx}{dt} + x = \sin t, \quad x(0) = 0$

解答例 1)　まず、特解を求める。右辺は $\sin t$ で変化する。しがって、左辺も　$\sin t$ で変化しなければいけない。そのものが sin であったり、微分して sin であるものは、sin と cos と $t \sin$ である。したがって、特解は

$$x_p = a\ \ \sin t + b\ \ \cos t + c\ t \sin t$$

の形をしている。代入すれば、

$$a \cos t - b \sin t + a \sin t + b \cos t + c \sin t + c\ t \cos t = \sin t$$

なので、$a - b + c = 1,\ a + b = 0, c = 0$ となり、$x_p = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$。同次解、$d\ e^{-t}$ を加えて、初期条件を満足させれば、

$$x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t})$$

解答例 2) 定数変化の方法を用いる。同次方程式の解は $ce^{-t}$ である。この $c$ が $t$ の関数であるとして、元の方程式に代入すると、

$$\frac{dc}{dt} = e^t \sin t$$

となる。 したがって

$$c(t) = c_0 + \int_0^t e^{\tau} \sin \tau d\tau = c_0 + \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t)$$

で、解は、初期条件 $x(0) = 0$ を用いて、

$$x(t) = c(t) e^{-t} = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t}).$$