

2010年度入学試験(2009年8月実施) 問題2 解答例

問1: 運動量保存に関する問題。運動量の保存

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_0, \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \quad (1)$$

と運動エネルギーの保存

$$\frac{1}{2} m_1 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (u_2^2 + v_2^2) = \frac{1}{2} m_1 u_0^2 \quad (2)$$

を用いてを解く。

(a) 運動量の保存より、 $u_2 = \frac{m_1}{m_2}(u_0 - u_1)$, $v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1$

(b) $v_1 = v_2 = 0$, $m_1 = m_2$ なので、運動エネルギーの保存は

$$u_2^2 + u_1^2 = u_0^2$$

これに、運動量の保存、 $u_2 = u_0 - u_1$ を代入すれば、

$$u_1(u_0 - u_1) = 0$$

衝突後は、 $u_0 \neq u_1$ なので、 $u_1 = 0$ が答え。

(c) 衝突後の速度 V_1, V_2 が直交しているというのは、ベクトル V_1, V_2 のスカラー積がゼロ、すなわち、

$$V_1 \cdot V_2 = u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0$$

ということである。これを証明すればよい。

$m_1 = m_2$ としたときの (a) の結果を用いると、

$$V_1 \cdot V_2 = u_1 u_2 + v_1 v_2 = u_1(u_0 - u_1) - v_1^2 \quad (3)$$

一方、運動エネルギーの保存 (2) からは、

$$u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 = u_0^2. \quad (4)$$

を得る。これに $m_1 = m_2$ としたときの (a) の結果を代入すれば、 $u_1(u_0 - u_1) - v_1^2 = 0$ を得る。すなわち、 $V_1 \cdot V_2 = u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0$ 。

エネルギーが衝突に際して減少する場合、エネルギーの減少分を ε とすれば、(4) は、

$$u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 = u_0^2 - \frac{2}{m}\varepsilon$$

となる。これより、 $u_1(u_0 - u_1) - v_1^2 = \varepsilon/m > 0$ を得る。すなわち角度は小さくなること
が分かる。

よりスマートに、ベクトルを用いると、エネルギーの式は

$$\frac{1}{2} m V_1 \cdot V_1 + \frac{1}{2} m V_2 \cdot V_2 = \frac{1}{2} m V_0 \cdot V_0 - \varepsilon, \quad (5)$$

運動量の式は

$$m\mathbf{V}_1 + m\mathbf{V}_2 = m\mathbf{V}_0 . \quad (6)$$

(5) に $2/m$ を掛けたものから、 m で割った運動量の式の両辺を 2 乗したもの、 $(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) \cdot (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0$ 、を引くと

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + 2\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0 - 2\varepsilon/m - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0. \quad (7)$$

よって、

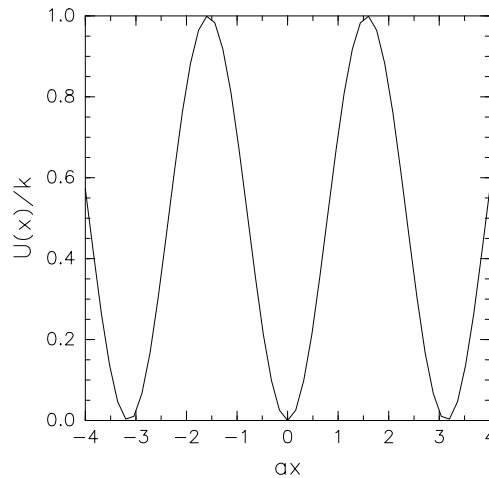
$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = \varepsilon/m \quad (8)$$

問 2: 力学的エネルギーの保存に関する問題である。

(a) 保存力 $F(x)$ と $F(x)$ による位置エネルギー (ポテンシャル) $U(x)$ の関係は、

$F(x) = -\frac{dU}{dx}$ 。すなわち、 $U(x)$ が減少する方向に力は働く。 $U(x) = k \sin^2 ax$ を用いると、 $F(x) = 2ak \sin ax \cos ax$ 。

(b)



U は $\sin ax$ の 2 乗に k を掛けたものなので、 $x = 0, \pm\pi/a, \pm2\pi/a, \dots$ でゼロになり、 $x = \pm\pi/2a, \pm3\pi/2a, \dots$ で最大値 k となる周期関数である。図にする時には、周期関数であることがわかるように複数周期描いた方が良い。

(c) $x = 0$ での質点の速さを v_0 、 x での速さを v とする。 $U(0) = 0$ なので、力学的エネルギーの保存は

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

である。運動の仕方は、質点が $U(x)$ 最大の位置を越えるか、越えないかで大きく異なる。この境を与える v_0 は $v_C = \sqrt{2k/m}$ である。 $v_0 < v_C$ では、質点は $x = 0$ の周りで振動することになる。

問 3: 熱力学の一般知識を問う問題である。

1. 間違い。高温の物体ほど波長の短い電磁波を出す。
2. 間違い。分子量には依存しない。
3. 間違い。断熱変化での内部エネルギーは仕事によって変化する。
4. 正しい。
5. 正しい。