2010 年度入学試験 (2009 年 8 月実施) 問題 1 解答例

問 1: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$、$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ より、

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

右辺から左辺を導く。

$$\begin{aligned}
\sin x \cos y + \cos x \sin y &= \frac{1}{4i}\left\{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{iy} + e^{-iy}\right) + \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{iy} - e^{-iy}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4i}\left\{e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)} - e^{-i(x+y)} + e^{i(x+y)}\right. \\
&\quad \left. - e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)} - e^{-i(x+y)}\right\} \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}\right) = \sin(x+y)
\end{aligned}$$

問 2:

(a) $\nabla^2 f = (2a + 2b + c^2(ax^2 + by^2))e^{cz}$

(b) $\boldsymbol{k} \times \nabla f = \boldsymbol{k} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = -\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{v}$

f を代入し、微分すると、$\boldsymbol{k} \times \nabla f = -2bye^{cz}\boldsymbol{i} + 2axe^{cz}\boldsymbol{j}$

(c) $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

(d) $$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{j}\right) \\
&= -\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{k} \\
&= -2caxe^{cz}\boldsymbol{i} - 2cbyxe^{cz}\boldsymbol{j} + 2(a+b)e^{cz}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

問 3: $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ は $x = 0, y = 0, z = 0$ の三面ではゼロ、$x = 1, y = 1, z = 1$ の面それぞれでは、y, z, x なので、I は

$$I = \int_0^1 \int_0^1 ydydz + \int_0^1 \int_0^1 zdzdx + \int_0^1 \int_0^1 xdxdy = \frac{3}{2}$$

別解: ガウスの定理を用いると、$I = \int\int\int \nabla \cdot \boldsymbol{v} dV$ である。したがって、

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (y + z + x)dxdydz = \frac{3}{2}$$

問 4: $\frac{d^2 x}{dt^2} + ax = 0$ の一般解は、$a \neq 0$ としたとき、

$$x = Ae^{\sqrt{-a}\ t} + Be^{-\sqrt{-a}\ t}$$

である。初期条件より、$A + B = 0, \sqrt{-a}(A - B) = 1$ なので、初期条件を満足する解は

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-a}}\left(e^{\sqrt{-a}t} - e^{-\sqrt{-a}t}\right)$$

である。$a \to 0$ の極限を取れば、この解が $a = 0$ も含むことが分かる。$a < 0$ なら、
$\sqrt{-a} = \sqrt{|a|}$、$a > 0$ なら、$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$ なので、

- $a < 0$ の時：$x = \dfrac{1}{\sqrt{|a|}} \sinh \sqrt{|a|}\ t$ となり、最初は線形的、その後指数関数的な増大
- $a > 0$ の時：$x = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \sin \sqrt{a}\ t$ となり、振幅 $1/\sqrt{a}$、周期 $2\pi/\sqrt{a}$ の振動
- $a = 0$ の時：$x = t$ となり、線形増大。

図は省略。