2023年度入学試験（2022年8月実施）　問題2：必答問題

問1【運動と摩擦力】

問1 (a)

静止摩擦力は外力に対応して変化しますが、2つの物体の間の分子間力によって決まる上限があります。最大摩擦力（最大の静止摩擦力）は垂直抗力Nに比例し、その比例係数μが静止摩擦係数です。図1.1に、静止摩擦力が最大値に達した状態を示します。

図1.1より、斜面に沿う方向の力のつりあいの式は

$$mg\sin\theta_0 = \mu mg\cos\theta_0$$

したがって、答えは$\theta_0 = \tan^{-1}\mu$

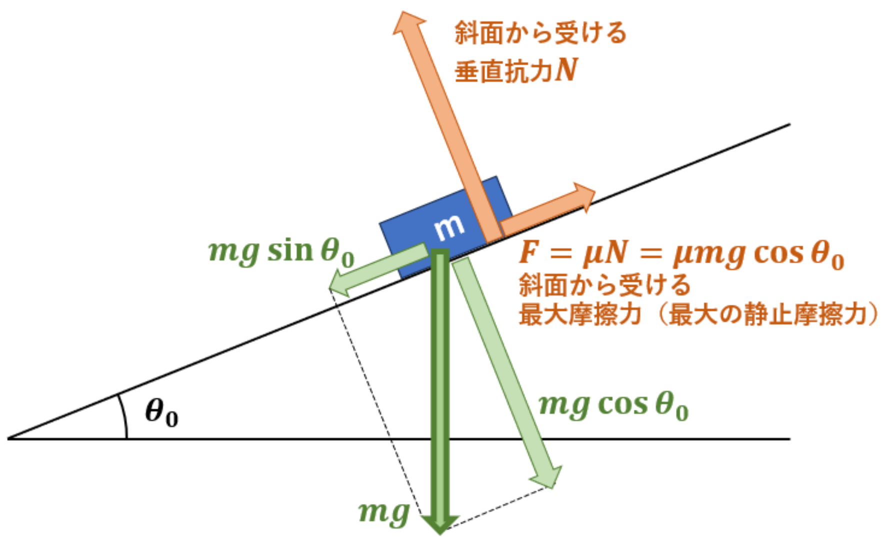

図1.1：　問1(a)の状況（静止摩擦力が最大値に達した状態）における力のつりあい。

問1 (b)

図1.1の静止摩擦係数μを動摩擦係数μ'によみかえて、斜面に沿う方向の運動方程式は、斜面に沿う方向の加速度をaとして、

$$ma = mg\sin\theta_0 - \mu' mg\cos\theta_0$$

と表されます。

摩擦力$\mu' mg\cos\theta_0$がない場合は、斜面を下るにしたがって位置エネルギーが運動エネルギーに変換され、力学的エネルギーは保存するわけですが、ここでは摩擦力によって力学的エネルギーが減少することになります。その減少量は、摩擦力（$\mu' mg\cos\theta_0$）×距離（L）より計算されます。

したがって、答えは$\mu' mgL\cos\theta_0$

問２【物体の衝突とバネ】

バネには自然の長さ（x_0）があり、そこからの変形（伸び、縮み）の大きさ（$\Delta x = x - x_0$）と元に戻ろうとする力（復元力F）との間にはほぼ比例関係（$F = -k\Delta x$）があります。これをフックの法則といいます。その比例係数kをばね定数と呼びます。また、バネのように外力を取り除くと完全に元に戻る性質を弾性と呼びます。

この問題は、力学的エネルギーの保存から考えるのがよいでしょう。バネの弾性のエネルギーは、$U = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$であらわされます。（これは、バネを伸ばすあるいは縮ませる時の仕事=バネに与える力×距離から導出することができます。実際に自分で式を立てて導出してみましょう。）

問２（a）

物体 A の運動エネルギーがバネの弾性エネルギーにすべて変換されるので以下が成り立ちます：

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

したがって、答えは

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

問２（b）

衝突後の物体 A と B の速さをそれぞれv_Aとv_Bとすると、衝突前後の力学的エネルギーの保存の式は、

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}m{v_A}^2 + \frac{1}{2}m{v_B}^2$$

また、運動量の保存の式は、

$$mv_0 = mv_A + mv_B$$

です。

バネが最も縮んだ時は、$v_A = v_B$となる時です。その時、$v_A = v_B = \frac{1}{2}v_0$であり、その時$\Delta x$は

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m}{2k}} v_0$$

となります。これが答えです。

問２（c）

バネが自然長に戻った時（$\Delta x = 0$）には（要するに、バネが存在しない、完全弾性衝突の場合と同じことになり）、以下の運動エネルギー保存の式と運動量保存の式が成り立ちます。

$$\frac{1}{2} m {v_0}^2 = \frac{1}{2} m {v_A}^2 + \frac{1}{2} m {v_B}^2$$

$$m v_0 = m v_A + m v_B$$

したがって、答えは$v_A = 0$、$v_B = v_0$（物体 A は止まり、物体 B の速さがv_0)、となります。

（完全弾性衝突で、ふたつの物体の質量が等しい時には、衝突によって速度が入れ替わるのです。）

問３【波動】

問３（a）解答は：$f(x,t) = a\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$

解説：

大気や海洋には波が満ち満ちており、大気・海洋の物理学の研究において波に関する知識は基本中の基本です。ですので、物理学における振動と波動の基本事項（高校物理〜大学初年度のレベル）は教科書や参考書でよく確認しておくのがよいでしょう。

ここでは、進行する波の基本的な数式表現が問われています。

【なお、波の変位（yあるいは具体的な関数fにより$y = f$）は、空間（たとえばx）と時間（t）の変数となっており直観的に把握するには少々複雑です。時間を固定してある瞬間の波の形を見る（問題中の図３）、という見方と、空間を固定して、ある場所における変位の時間変化を見る（問３（c））、という見方、両方の見方で見ていくことで全体像がだんだん理解できるようになると思います。】

x軸方向に進む波を考えます。時刻$t = 0$での波の形が関数$f(x)$であらわされるとします。これが速さvでx軸の正の方向に進む場合、位置x、時刻tにおける波の変位は、$f(x,t) = f(x - vt)$となります。時刻が$t = 0$から$t = t$に進むと、x軸上の各点において$t = 0$の時に（左の方の）$-vt$の位置にあった変位が進んできているからです（手描きの図を描いて確認しよう）。逆に、速さvでx軸の負の方向に進む場合は、$f(x,t) = f(x + vt)$となります。

この問題では、波の形が振幅aの正弦波であるとのことなので、

$$f(x,t) = a\sin(C_1(x - vt) + C_2)$$

という形をしている、ということになります。波長λとのことなので、x軸方向にλ進むごとに$\sin(\quad)$の中身が2π進む、つまり、$C_1 = \frac{2\pi}{\lambda}$。さらに、$t = 0$において問題中の図３で与えられた形をしているということで、位相C_2は$C_2 = 0$でよい、ということになります。

なお、周期と振動数・角振動数との関係、周期と波長と波の進む速さとの関係について、教科書・参考書でよく確認しておきましょう。波の式は、これらの変数を組み合わせて、上記解答とは異なる表し方をする場合もあります。いろいろな表し方を確認しておきましょう。

問 3（b）解答は：B 点。その左側で変位が正つまり右方向、その右側で変位が負つまり左方向となっているので、B 点で密度が最大となっており、圧力も最大となっている。

解説：

縦波とは、波の進行方向に変位が起こる波のことです。（波の進行方向を「縦」ととらえます。）媒質の疎な部分と密な部分とが交互に生じながら伝わる波で、疎密波と呼ばれることもあります。縦波の代表例として、音（音波）があります。空気分子の密度が疎な部分と密な部分とが交互に生じながら伝わり、人の耳の鼓膜を一定周期で振動させると、ある音程の音として聴こえるわけです。（いっぽう、横波とは波の進行方向と直角な方向に変位が起こる波のことです。たとえば、ギターの弦をつま弾くと横波が生じます。）

【Youtube などで縦波の説明動画を探してみるとよいでしょう。】

圧力が最大となっている点は B 点です。B 点の左側（たとえば A 点）で変位が正つまり右方向、その右側（たとえば C 点）で変位が負つまり左方向となっているので、B 点で密度が最大となっており、圧力も最大となっています。

問 3（c）解答は：$y = -a\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$のグラフを描く。$T = \frac{\lambda}{v}$は周期。

解説：

問題中の図 3 は横軸がxになっています。つまり、この形が右方向に進んでいくわけです。D 点においては、$t = 0$で変位ゼロ、次に（少し左にいた）図 3 の C 点の変位（負値）が来て、、、となるので、まず負の方へ振れて、、、という横軸が時間のグラフになります。周期Tは$T = \frac{\lambda}{v}$です（Tの次元が[時間]になっていることを確認しよう。SI 単位系ならλの単位が m、v の単位が m s^{-1} で、Tの単位は s（秒））。

（横軸の目盛りについては、横軸をtとして原点 0 やTなどを記す、あるいは、横軸を$\frac{t}{T}$として原点 0 や 1 などを記す、あるいは、横軸を$2\pi\frac{t}{T}$として原点 0 や2πなどを記す、などのやり方があるでしょう。）