# 2023年度入学試験（2022年8月実施）　問題１：必答問題

## 問１【微分方程式】

「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」の一番最後に大変に重要なことが書かれています：

**「微分方程式を解いたときには、得た解を元の式に代入して、それを満足するかどうかチェックすることをお勧めする。」**

確かめ算やクロスチェックは、テストや試験だけでなく、研究活動においてもいつも非常に重要です。

### (a) $y = e^{\lambda x}$ の形の解を考えます。

$y = e^{\lambda x}$ の形の解を考えて、これを式に代入すると、

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

を解くと、$\lambda = 1, 2$ であるから、解は、$C_1$ と $C_2$ を積分定数として、

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

### (b) これは実は変数分離ができるパターンです。

$$\frac{dy}{dx} + yx - x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -x(y-1)$$

$$\frac{1}{y-1} dy = -x\, dx$$

両辺を積分して

$$\int \frac{1}{y-1}\, dy = \int -x\, dx$$

$$\log\, |y-1| = -\frac{1}{2}x^2 + C'$$

$$y - 1 = C\, e^{-x^2/2}$$

$$y = C\,e^{-x^2/2} + 1$$

ここで、$C', C$ は積分定数。

もちろん、必ず確かめ算もしましょう。$\frac{dy}{dx} = \cdots = -xy + x$ となりますか？

なお、もちろん、問題の式を非同次の式であると見て、まず対応する同次方程式、

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

を解いて（変数分離法で、もしくは $e^{-f(x)}$ の形を想定して）

$$y = C\,e^{-x^2/2}$$

その上で、非同次の式に $y = C(x)\,e^{-x^2/2}$ を代入して $C(x)$ を求める（定数変化の方法）、というやり方でも解けます。練習問題として、同じ解にたどり着くことを確かめてみよう。

問２【ベクトル】

まずは、「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」の「2 ベクトル」を読んでください。そこには「ベクトル演算をする場合には、デカルト座標系（直交直線座標系、直角座標系、$x-y-z$ 座標系）での成分表記を用いるのが簡便である。」と書かれています。煩雑にはなるかもしれませんが、成分表記して、ひとつひとつ間違えないように注意して我慢強く計算を進めていけば、確実に答えにたどりつきます。

また、以前の年の8月の試験の解答例・解説も参照してください。ここでは、以下のような表記、やり方にて進めていきます。

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$
$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

なお、それぞれの問題の演算結果が、ベクトルになるか、スカラーになるか、にまず注意しましょう。

(a)
まず確認ですが、

$$r^n\,\boldsymbol{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \\ y(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \\ z(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

です。したがって、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(r^n\,\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} \\ y(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} \\ z(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \left\{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} + x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}\,nx\right\}$$

$$+ \left\{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} + y(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}\,ny\right\}$$

$$+ \left\{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} + z(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}\,nz\right\}$$

$$= 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} + n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}\,(x^2+y^2+z^2) = 3r^n + nr^n$$
$$= (3+n)r^n$$

なお、極座標変換を用いるともっとスマートに解けます。(たとえば、「2020 年度入学試験(2019 年 8 月実施) 問題 1 :必答問題」の問 3 の解説の中に、極座標における傾き/勾配(gradient, grad)、発散(divergence, div)、回転(rotation, rot, curl)が記してあります。)
発散は、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

であり、$r^n\,\boldsymbol{r}$ は極座標変換($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$)により

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となりますので、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(r^n\,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,r^{n+1}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^{n+3}) = \frac{1}{r^2}\,(n+3)r^{n+2} = (n+3)r^n$$

となります。

(b)

$\nabla^2$ （あるいは、$\Delta$ もしくは $\nabla\cdot\nabla$ と表記）は、ラプラシアン（ラプラス作用素、Laplace operator）と呼ばれ、関数（ユークリッド空間上の函数）の「勾配の発散をとる」ものです。（つまり $\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f)$ です。）ラプラシアンは、大気や海洋の現象を含むさまざまな物理現象を記述する微分方程式に現れます。

$$\boldsymbol{\nabla}^2 r^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left( (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x) \\ -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2y) \\ -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ -y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ -z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(2x) \right\}$$

$$+ \left\{ -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(2y) \right\}$$

$$+ \left\{ -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(2z) \right\}$$

$$= -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(x^2+y^2+z^2) = 0$$

別解：

ラプラシアンは関数の「勾配（grad）の発散（div）をとる」わけですから、

$$\boldsymbol{\nabla}^2 r^{-1} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla} r^{-1})$$

ですが、右辺のカッコの中は、

$$\boldsymbol{\nabla} r^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ -y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ -z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = -r^{-3}\,\boldsymbol{r}$$

したがって、

$$\boldsymbol{\nabla}^2 r^{-1} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla} r^{-1}) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(r^{-3}\,\boldsymbol{r})$$

これは（a）で $n=-3$ の場合に当たるので、ゼロになるとすぐに分かります。

さらに別解：

ラプラシアンの極座標系（$r, \theta, \varphi$）の表示

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

を使っても、簡単に求まります。右辺第 2 項と第 3 項はゼロですので、第 1 項のみ計算すればよいわけです。同じ答えが出ることを確認してみましょう。

（c）

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$$

は内側から順番に計算してみましょう。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y z - a_z y \\ a_z x - a_x z \\ a_x y - a_y x \end{pmatrix}$$

したがって、

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_y z - a_z y \\ a_z x - a_x z \\ a_x y - a_y x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_x \\ 2a_y \\ 2a_z \end{pmatrix} = 2\,\boldsymbol{a}$$

問３【積分など】

(a)

図より（もしくは対称性より）点Ｐ は $y = x$ の線上にあるので、その座標を $(x_1, y_1)$ とすると $y_1 = x_1$、 $\frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{x_1}^2}{b^2} = 1$ より、${x_1}^2 = {y_1}^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$。

したがって、点Ｐの座標は、$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

(b)

まず確認ですが、$a > b > 0$ という条件より、縦に長い方の楕円の式が $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 0$、横に長い方の楕円の式が $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ です。また、面積 $S_1$ は、点Ｏと点$(b, 0)$を結ぶ直線、点$(b, 0)$と点Ｐを結ぶ曲線 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 0$（縦に長い方の楕円、$y = a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}$ ）、点Ｐと点Ｏを結ぶ直線、で囲まれた領域の面積です。点$(b, 0)$は $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 0$（縦に長い方の楕円）と$x$軸との交点です。

ここでは、面積 $S_1$ を OP を斜辺とする直角二等辺三角形とそれ以外だと考えてみることにします。すると、式は以下のように立てられます。

$$S_1 = \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} + \int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b} \left(a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\right) dx$$

右辺第２項の積分を $S_2$ と書くことにして、これは、

$$x = b\sin\theta$$

と置換するのが定石で、$x$の区間 $\left[\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\right]$ に対して、$\theta$の区間は $\left[\theta_1, \frac{\pi}{2}\right]$ となります。ここで、$\theta_1$ は $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす$\theta$、つまり、$\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$。$dx = b\cos\theta\ d\theta$ であるので、$S_2$ は、

$$S_2 = \int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b} a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\ dx = \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} ab\sqrt{1 - \sin^2\theta}\ \cos\theta\, d\theta = ab\int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

加法定理を思い出すと、$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ なので、

$$S_2 = ab\int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = ab\int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{ab}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 - \frac{\sin 2\theta_1}{2}\right)$$

ここでもう一度加法定理を思い出すと、$\sin 2\theta_1 = 2\sin\theta_1\cos\theta_1$、さらに、$\sin\theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

であるような直角三角形を考えると（図 1）$\cos\theta_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であることが分かるので、

$$S_1 = \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + S_2 = \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 - \frac{\sin 2\theta_1}{2}\right) = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)$$

したがって、

$$S_1 = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right)$$

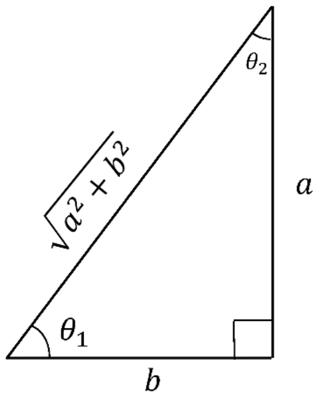


図 1 ：$\sin\theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であるような直角三角形。$\cos\theta_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。また、$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ であることにも注意（次のページを参照のこと）。

本当に合っているのかなんらかの形で確かめ算がしたいところですが、たとえば $a = b$ の場合、半径 $a$ の円の面積の 8 分の 1 となるはずですが、

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi a^2}{8}$$

とたしかにそうなります。

ここで、再度、問題の図を眺めてみると（どうして次の（c）という問題があるのでしょう？）、$S_1$ は以下のようにしても求められることに気付きます。

$$S_1 = \int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} \left( b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \right) dx \; - \; \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

どこの面積に注目しているか、分かりますか？

計算の手順は前ページととてもよく似ています。（残念ながら手間は同じようなものでしょう。でも確かめ算にはなりますね。）$x = a\sin\theta$ と置換し、$\theta$の区間を $[0, \theta_2]$ としましょう。ここで $\theta_2$ は図 1 の $\theta_2$ です。計算結果は、

$$S_1 = \frac{ab}{2}\theta_2 = \frac{ab}{2}\sin^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

となります。$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ であることに注意すると、$S_1$ のふたつの表現が同値であることが分かります。

なお、図 1 より、

$$S_1 = \frac{ab}{2}\theta_2 = \frac{ab}{2}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

とも表現できます。

（c）

これは図より、$S_1$の 8 倍なので、

$$4ab\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right)$$

もしくは

$$4ab\sin^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

もしくは

$$4ab\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$