2022 年度入学試験（2021 年 8 月実施）　問題 2 ：必答問題

問 1 【物体の運動と衝突】

まず、ボールの軌跡$\left(x(t), z(t)\right)$の式について、確認しておきましょう。（等加速度運動の場合、$\vec{V} = \overrightarrow{V_0} + \vec{a}t$、$\vec{X} = \overrightarrow{V_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$です。）初速度は$(v_0 \cos 45, v_0 \sin 45) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_0, \frac{1}{\sqrt{2}}v_0\right)$なので、子どもの位置を原点として、以下が成り立っています：

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 t$$

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

2 つの物体の衝突の問題は、（この系が外力を受けない場合は）運動量保存の式と、反発係数（跳ね返り係数）の式を連立して解きます。反発係数とは、2 つの物体の近よる速さと離れる速さの比です。

$$\text{反発係数（跳ね返り係数）} = \frac{\text{離れる速さ}}{\text{近よる速さ}}$$

反発係数が 1 の場合は、完全弾性衝突であり、運動エネルギーも保存しますので、反発係数=1 の式の代わりに運動エネルギー保存の式を使うこともできます。（反発係数=1 の式を使う方が、計算が簡単になることが多いかもしれません。）

力積と運動量変化との関係、仕事とエネルギーとの関係について、教科書・参考書によりよく復習しておきましょう。

問 1 （a）i.

次のページの図 1.1 のようにまず壁がない場合の距離L_0を求めておきます。図中のL_0が求まれば、求めたいx座標は、

$$x = L - (L_0 - L)$$

より求まることになります。

L_0は、上の$z(t)$の式を眺めて、$z(t) = 0$を満たすtのうちゼロでない方、つまり$t = \frac{\sqrt{2}v_0}{g}$、を選べばよいわけですから、これを上の$x(t)$の式に代入して、$L_0 = \frac{{v_0}^2}{g}$。

したがって、求めたいx座標は、$2L-\frac{{v_0}^2}{g}$となります。

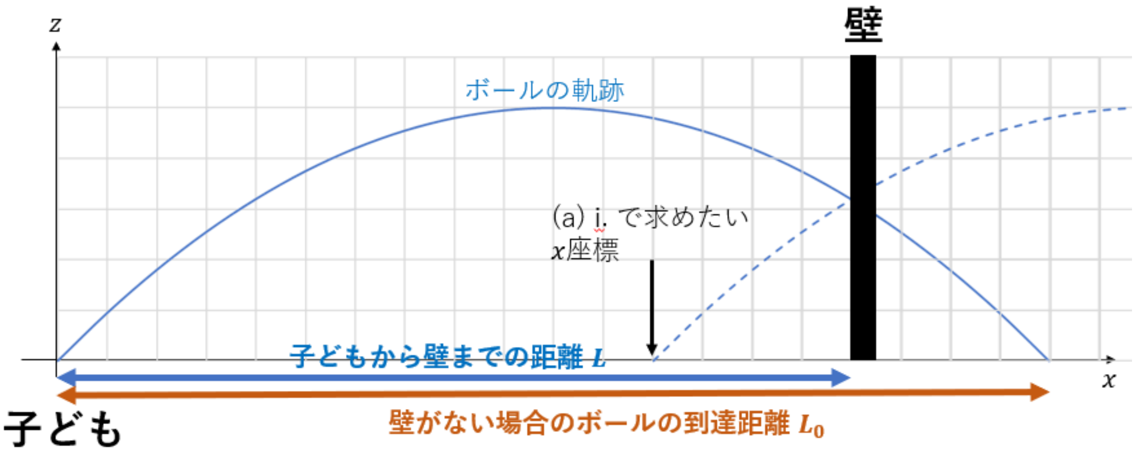

図 1.1： 問 1(a)の状況の図。（$L<\frac{1}{2}L_0$の場合はどうなるでしょう？考えてみよう。）

問 1 （a） ii.

力積（impulse）とはある力がある時間作用し続ける時の力と時間の積ですが、これは運動量の変化に等しい。（つまり力積はベクトル量。）【教科書や参考書で、力積と運動量の関係を復習しておこう。】

「ボールが壁に与えた力積」は、「衝突前後のボールの運動量の変化」から求めます。

x方向のボールの運動量の変化は、衝突後－衝突前、より

$$\left(-m\frac{1}{\sqrt{2}}v_0\right)-m\frac{1}{\sqrt{2}}v_0=-\sqrt{2}mv_0$$

であり、逆に、ボールが壁に与えた力積（のx成分）は、作用反作用の法則から、$+\sqrt{2}mv_0$、ということになります。
いっぽう、力積のz成分は、壁面は滑らかであるとのことなので、摩擦力等の力は働かないため、ゼロです。（z方向には衝突の前後でボールの運動量は変化しない。）

したがって、答えは$\left(\sqrt{2}mv_0,0\right)$。

問 1 （a）iii.

仕事（work）とは、ある物体をある力でその力の方向にある距離変位させた時の力と距離の積（力と変位の内積）ですが、これは力学的エネルギーの変化に等しい。【教科書や参考書で、仕事とエネルギーの関係を復習しておこう。】

「ボールが壁にした仕事」は、「衝突前後のボールの運動エネルギーの変化」から求めます。

ここでは、ボールの運動エネルギーは衝突の前後で変化していません。
したがって、ボールが壁にした仕事はゼロです。

問 1 （b）i.

今度は壁が速度Uでゆっくりと（$|U|$はv_0に比べてずっと小さい）子どもから遠ざかる方向に移動しています。反発係数＝1 の式を使って、衝突直後のx方向のボールの速度（v'とおくことにします。$v' < 0$です）を求めます。

- 近よる速さ：$\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 - U$（$U$の分だけ少し遅くなっています）
- 離れる速さ：$-v' + U$（Uの分だけ少し速くなっています）

近よる速さ＝離れる速さ、より、$v' = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 + 2U$（つまり$U$の 2 倍が加わることになります）

x方向のボールの運動量の変化は、衝突後－衝突前、より

$$m\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 + 2U\right) - m\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 = -\sqrt{2}mv_0 + 2mU$$

であり、逆に、ボールが壁に与えた力積（のx成分）は、作用反作用の法則から、$+\sqrt{2}mv_0 - 2mU$、ということになります。
いっぽう、力積のz成分は、（a）ii.と同様、壁面は滑らかであるとのことなので、摩擦力等の力は働かないため、ゼロです。（z方向には衝突の前後でボールの運動量は変化しない。）

したがって、答えは$\left(\sqrt{2}mv_0 - 2mU, 0\right)$。

問１（b）ii.

ボールの運動エネルギーの変化は、衝突後－衝突前、より

$$\frac{1}{2}m\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}v_0+2U\right)^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_0\right)^2=mU(-\sqrt{2}v_0+2U)$$

したがって、ボールが壁にした仕事は、(-1)倍して、$mU(\sqrt{2}v_0-2U)$となります。

問２【剛体の回転運動】

解答例：
物体の質量をM、半径をR、重力加速度の大きさをgとする。はじめに静止していた物体が、鉛直方向の落差hだけ転がり落ちた時に、坂に沿った方向の重心の速さがV、回転角速度がΩとなっていたとする。落下により減った位置エネルギー（Mgh）が、重心の並進運動のエネルギー（$\frac{1}{2}MV^2$）と重心周りの回転運動のエネルギー（$\frac{1}{2}I\Omega^2$）に変換・分配されるので、

$$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2$$

が成り立つ【ただし脚注[1]を参照】。
ここで、滑らないで転がる条件から、$V = R\Omega$ の関係がある。そこで、Ωに$\frac{V}{R}$を代入し、この式をVについて解くと

$$V = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{I}{MR^2}}}\sqrt{gh}$$

この式より、慣性モーメント IをMR^2で割った量（これを慣性モーメント比cと呼ぶ）が大きいほど、重心の並進運動の速さ、したがって加速度は小さくなることが分かる。（これは、慣性モーメント比cが大きいほど、その分回転のエネルギーの方に取られてしまうからである。）
慣性モーメントあるいは慣性モーメント比は、質量が回転軸からより遠いところにより多く分布しているほど大きくなる。（このことは、慣性モーメント I の定義$I \equiv \sum m_i {r_i}^2$から分かる。ただし剛体内の質量の要素 m_i が回転軸からの距離 r_i にあるとする。）慣性モーメントあるいは慣性モーメント比は、球、円柱、中空の円筒、の順に大きくなるため、並進運動の加速度はこの順に小さくなる。

---

[1] 当たり前ではありますが、式 $Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2$ を、位置エネルギーと運動エネルギーが“等しい”などと読んではいけません。力学的エネルギー（位置エネルギー＋並進運動エネルギー＋回転運動エネルギー）が保存する（一定である）のですから、この式が出てくる前提を丁寧に書くと：　位置エネルギーの基準をh落ちた後の高さにとることにすると、
　転がり始める前の力学的エネルギー：　$Mgh + 0$（2 種類の運動エネルギーはゼロ）
　h落ちた後：　0（ここを位置エネルギーの基準に取る）＋ $\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2$
このふたつが等しい、ということから、上記の式が導かれているのです。

解説：
はじめの位置エネルギーが、坂を転がり落ちるにつれて、(1)重心の並進運動のエネルギーと(2)回転運動のエネルギーに分配されます。分配の様子は物体の形状により異なってきます。物体の形状により慣性モーメント（回転運動に対する慣性の大きさ、回転のしにくさ）の値が違っていて、慣性モーメントが大きい物体では回転運動の方にエネルギーをより多く取られ、並進運動のエネルギーが小さく（加速度の大きさが小さく）なります。

剛体におけるある回転軸のまわりの慣性モーメント I は、剛体内の質量の要素 m_i が回転軸からの距離 r_i にあるとすると、$I \equiv \sum m_i r_i^2$ です。その単位は kg m^2 です。質量が回転軸からより遠いところにより多く分布していると、慣性モーメントは大きくなります。球と円柱と中空の円筒を比べると、球、円柱、中空の円筒、の順に慣性モーメントが大きくなります。さらに、こういった丸い物体についてはその質量Mと半径Rを用いて、$I = cMR^2$ という形に書けて、係数 c （これを慣性モーメント比と呼びます）の大小で決まります。

円筒や円柱や球が坂を滑らずに転がり落ちる問題は、最近よく出題されています。
前年度の夏の院試の必答問題[2]の解答例・解説[3]にて詳しく解説していますので、一度そちらをじっくり読んで解いてよく理解しておくとよいでしょう。

- 重心の並進運動の運動方程式はどう書けますか？
- 回転運動の運動方程式はどう書けますか？
- 滑らず転がる場合の並進加速度と回転角速度との関係はなぜ上記のようになるのでしょうか？
- 球、円柱、円筒の慣性モーメント・慣性モーメント比cを、定義にしたがって実際に計算すると、それぞれいくらになりますか？

[2] 令和 3 年度（2021 年度）大学院修士課程入学試験課題（令和 2 年（2020 年）7～8 月・オンライン実施）、課題 2： 必答課題、問 2【sen21m.pdf】
[3] 2021 年度入学試験(2020 年 8 月オンライン実施）課題 2：必答課題【answer20-2_v1.0.pdf】

問３【熱力学】

比熱、融解熱（潜熱）、熱フラックスの単位をよく見れば、熱量（単位ジュール J）にそろえるにはどういう式をたてればよいか分かります。また、W = J s^{-1} です。これらの概念と単位との関係をよく復習しておきましょう。

問３（a）

すべてが氷となる条件は、すべての水を凍らせた際に放出される熱量、が、すべての氷を結氷温度まで上げるのに必要な熱量、を下回ればよいわけです。（別の言い方をすると、一部の氷を結氷温度にまで上げるだけの熱量で、すべての水を凍らせる際に取り除かないといけない熱量をまかなえればよい、わけです。）

（すべての水を凍らせた際に放出される熱量）
＝（すべての水を結氷温度まで冷やした際に放出される熱量）＋（潜熱（融解熱））
= $C_w M_w (T_w - T_0) + L M_w$

（すべての氷を結氷温度まで上げるのに必要な熱量）
= $C_i M_i (T_0 - T_i)$

前者の方が後者よりも小さければよいので、したがって、答えは

$$C_w M_w (T_w - T_0) + L M_w \le C_i M_i (T_0 - T_i)$$

問３（b）

次の３つの熱量を考えます。
(1) 熱板から与えた熱量=$F_h \cdot S \cdot \tau$（単位が J になることを確認してください）
(2) 温度T_iの氷を温度T_fの水にするための熱量=$C_i M_i (T_0 - T_i) + L M_i + C_w M_i \left(T_f - T_0\right)$
(3) 温度T_wの水を温度T_f（$T_w > T_f$）の水にした時に放出される熱量=$C_w M_w \left(T_w - T_f\right)$
これらの関係は、(1)+(3)=(2)、です。

したがって、

$$F_h S \tau + C_w M_w \left(T_w - T_f\right) = C_i M_i (T_0 - T_i) + L M_i + C_w M_i \left(T_f - T_0\right)$$

が成り立ちます。これをT_fについて解いて整理します。

答えは

$$T_f = \frac{F_h S\tau + M_w C_w T_w + M_i\{C_w T_0 - C_i(T_0 - T_i) - L\}}{C_w(M_w + M_i)}$$

となります。（分子はいろいろな整理の仕方がありえます。）