2021年度入学試験（2020年8月オンライン実施）　課題２：必答課題

（注意：　本課題はオンライン実施されたものです。受験生は自宅で10日程度かけて答案を作成し提出しました。オンライン試験当日には、答案を踏まえた質疑がおこなわれました。従って、本課題を初見で1時間弱で解くことは求めてはいません。ただ、本課題に出てくる物理的な考え方はすべて重要で基本的なものであり、きちんと理解しておいて欲しいものです。）

問１【衝突】

完全弾性衝突の場合には、運動エネルギーが保存します。ですのでここでは、運動量保存則の式と運動エネルギー保存則の式を連立して、衝突後の速さを求めます。今回の問題では、物体が5個登場しますが、衝突をひとつひとつ順番に考えていけばよいのです。つまり、左端と左から2個目の衝突、2個目と3個目の衝突、3個目と4個目の衝突、4個目と5個目衝突（図1.1を参照のこと）、場合によっては、さらに4個目と3個目の衝突、3個目と2個目の衝突、、、というふうにひとつひとつ順番に考えていきます。（なお、もしもこの考え方がピンと来ない、ということであれば、図1.1のように物体と物体の間にとても小さなすきまがある、とみなしてみたらどうでしょう。）

まず、1個目（左端）と2個目の物体の衝突直後の速さがどうなるか考えておきましょう。質量はどちらも同じ m_1 です。衝突直後の1個目の物体の速さを V_1、2個目の物体の速さを V_2 とすると、運動量保存則の式と運動エネルギー保存則の式はそれぞれ、

$$m_1 v = m_1 V_1 + m_1 V_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 {V_1}^2 + \frac{1}{2} m_1 {V_2}^2$$

となります。これらから V_2 を消去して V_1 について解くと、

$$V_1 (V_1 - v) = 0$$

したがって、数学的には解は次の2セット、$(V_1, V_2) = (0, v), (v, 0)$ が出てきます。物体の並び順を考えると（左端の物体が 2 個目の物体を追い抜くことはできないので）、解は $(V_1, V_2) = (0, v)$ となります。（もうひとつの解は衝突直前のものなのです。）つまり、1個目（左端）の物体は衝突後静止し、2個目の物体が右向きに速さ v を持ちます。（教科書によってはこれを「速さが交換される」というふうに表現しています。）

次に2個目と3個目の物体の衝突を考えると、両方とも質量が同じ m_1 ですから、上と同じことが起こります。つまり、衝突直後、2個目は即座に静止し（つまり2個目は結局微動だにしません）、3個面の物体が右向きに速さ v を持ちます。3個目と4個目の衝突でも全

く同じことが起こります。4 個目と 5 個目衝突のところで、まずは、$m_2 = m_1$ の場合を考えてみましょう。この場合、4 個目は静止、5 個目が右向きに速さ v を持ちます。結局、$m_2 = m_1$ の場合は、1 個目（左端）の物体が速さ v で静止している 2 個目〜5 個目の物体に衝突すると、衝突後には、1 個目（左端）の物体と 2 個目〜4 個目の物体が静止、右端の 5 個目の物体だけが速さ v で右方向に進むことになります。

なお、このことを実演してみせるのが、「ニュートンのゆりかご」（あるいは「カチカチ玉」）と呼ばれる複数の金属玉をひもでつるした装置です。見たことがない人は、一度動画などで見てみるとよいでしょう。

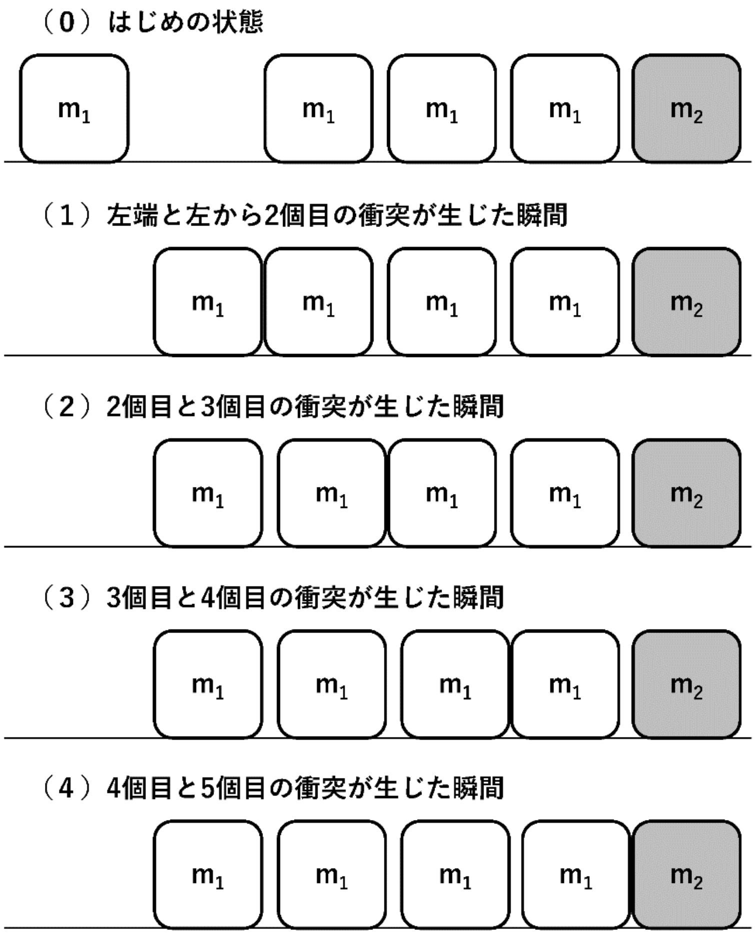

図 1.1： はじめの状態（0）から、左端と左から 2 個目の衝突（1）、2 個目と 3 個目の衝突（2）、3 個目と 4 個目の衝突（3）、を経て、4 個目と 5 個目の衝突（4）、までの様子。この図では、考えやすいように、はじめの状態において、あえて 2 個目〜5 個目それぞれの間にすきまを少し空けておく。すきまが詰まっているところが衝突が起こっているところである。

さて、今回の問題は、5 個目の物体の質量が一般に $m_2 \neq m_1$ の場合に、何が起こりますか、という問題です。

このような場合、まずはじめに極端な状況を簡単に考察してみておくと、見通しがよくなり有益であることが多いように思います。

(i) $m_2 \ll m_1$ の場合、つまり、$m_2 \to 0$ の場合： 上での考察を参考にすると、4 個目は 5 個目に止められることなくほぼ速さ v で右の方へ動きそうです。その時、5 個目の速さがどうなるかについては、あとでちゃんと計算してみましょう。

(ii) $m_2 \gg m_1$ の場合、つまり、たとえば 5 個目の物体が動かない壁である場合： 4 個目が右の「壁」に完全弾性衝突するので、反対向き（左向き）に速さ v で動こうとし、次々と左向きに運動量の交換が起こっていくわけなので、最終的には、左端（1 個目）の物体が速さ v で左の方へ動くことになります。つまり、単に、左端（1 個目）の物体は、2 個目の物体に衝突した時点で、左の方へ同じ速さではねかえるわけです。

ここまでの考察から、衝突が順番に起こっていき、4 個目の物体（質量 m_1）と 5 個目の物体（質量 m_2）が衝突した直後の状態について、きちんと調べればよい、ということが分かります。

衝突後の 4 個目の物体の速さを V_4、5 個目（一番右端）の物体の速さを V_5 とすると、運動量保存則の式と運動エネルギー保存則の式はそれぞれ

$$m_1 v = m_1 V_4 + m_2 V_5$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 {V_4}^2 + \frac{1}{2} m_2 {V_5}^2$$

と書けます。これらから V_5 を消去して V_4 について解くと、

$$\left(V_4 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \right) (V_4 - v) = 0$$

従って、数学的には解は次の 2 セット、$(V_4, V_5) = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v \right), (v, 0)$ が出てきます。物体の並び順を考えると（左端の物体が 2 個目の物体を追い抜くことはできないので）、解は $(V_4, V_5) = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v \right)$ の方となります。（もうひとつの解 $(v, 0)$ は、先ほどと同じで、衝突直前の両者の速さです。衝突前と衝突後、両方の速さの組が解として出てきているのです。）

最後に、上であらかじめざっと考察しておいたように、m_1 と m_2 の大小で場合分けをして

最終的な解を出します。

（1）$m_2 = m_1$ の場合

左端、2 個目～4 個目は静止。5 個目が速さ v で右向きに進む。(ニュートンのゆりかご)

（2）$m_2 < m_1$ の場合

左端、2 個目、3 個目は静止。4 個目は $\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v$ で、5 個目は $\frac{2m_1}{m_1+m_2}v$ で右向きに進む。

なお、念のため確認しておくと、$\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v > 0$ かつ $\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v < \frac{2m_1}{m_1+m_2}v$ であり、4 個目も 5 個目も右向きに進むが、5 個目の方が速いので、4 個目が 5 個目を追い抜くことはありません。また、$m_2 \ll m_1$ の場合には、4 個目はおおよそ v で、5 個目はおおよそ $2v$ で右向きに進む、ということが分かります。つまり、m_2 がいくら小さくても、5 個目の速さはせいぜい $2v$ にしかならないのです。これは面白い結果です。このファクター“2”は物理的にはどのように解釈できるでしょうか？

（3）$m_2 > m_1$ の場合

この場合、4 個目の“速さ” $\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v < 0$ なので、4 個目は右ではなく左へ動こうとしている。これが、3 個目、2 個目、1 個目（左端）へと順に衝突によって伝わることになる。結局、1 個目は速さ $\left|\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v\right|$ で左へ動き、2 個目、3 個目、4 個目は静止していて、5 個目は速さ $\frac{2m_1}{m_1+m_2}v$ で右向きに進む、ということになる。

以下、おまけの問題です。考えてみてください：

- $m_2 = m_1$で完全弾性衝突でない場合には重心の速度はどう変わるでしょうか？

問２【剛体の運動】

剛体の重心と回転それぞれについての運動方程式、慣性モーメントの定義、さらにいくつか代表的な剛体の慣性モーメントの導出について、確認・復習しておきましょう。

（a）

重心の並進運動の運動方程式は、質量 M の円柱状物体の重心の斜面に沿った速度を v 、斜面からうける静止摩擦力を F とすると、図 2.1 より、

$$M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\theta - F$$

となります。剛体に働くすべての外力が重心に働くと考えればよいのです。

また、回転の運動方程式は、中心軸周りの慣性モーメントを I （具体的な値は次のページで求めます）、角速度を ω とすると、（すべらずに）転がったとのことなので、

$$I\frac{d\omega}{dt} = RF$$

となります。斜面からうける静止摩擦力 F が、トルク（力のモーメントと呼ぶこともあります）$R \times F$ となり、円柱状物体の回転運動をもたらしているのです。

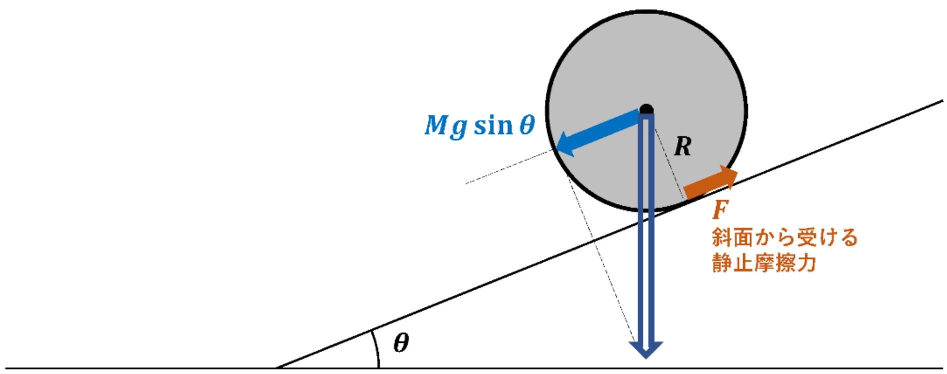

図 2.1：　斜面を転がり落ちる円柱状物体に働く力。

剛体におけるある回転軸のまわりの慣性モーメント I は、剛体内の質量の要素 m_i が回転軸からの距離 r_i にあるとすると、$I \equiv \sum m_i r_i^2$ です。その単位は kg m² です。密度が一様な円柱の中心軸のまわりの慣性モーメントは次のように考えて求めます。

- 円柱の単位体積あたりの密度 ρ は、円柱の高さを L とすると、$\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$ である。
- 円柱を、図 2.2 に示すように、回転軸からの距離 r にある微小幅 dr の微小体積要素 $\Delta V = dr \times 2\pi r \times L$ （つまり、半径 r 高さ L の「円筒」）の集合体と考える（r は 0 から R まで変化する）。
- 従って、$I \equiv \sum m_i r_i^2 = \int_0^R (\rho \cdot \Delta V) \cdot r^2$ であり、これを計算すると、$I = \frac{1}{2} MR^2$ となる。

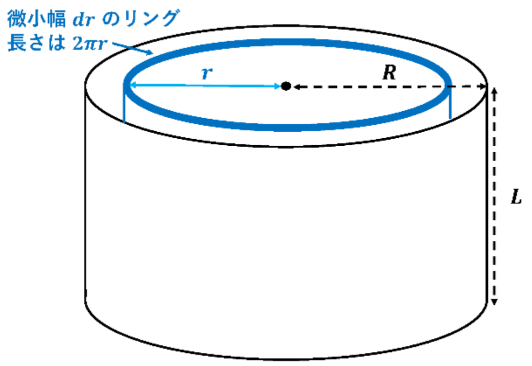

図 2.2： 回転軸からの距離 r にある微小幅 dr の微小体積要素（円筒）の体積 ΔV が $\Delta V = dr \times 2\pi r \times L$ であることを示す図。

なお、次の問（c）で穴をあける（形状を変える）という話が出てくるので、ここで慣性モーメント比という係数を導入しておきます。円柱や円筒や球のような半径 R の丸い物体（質量 M）の慣性モーメントは $I = cMR^2$ という形に書けて、係数 c （これを慣性モーメント比と呼びます）は剛体の形状に関わる定数です。密度一様な円柱や円板の場合は上で求めたように $c = \frac{1}{2}$ となり、密度一様な円環（リング）や円筒の場合は $c = 1$ となります。（確認してみよう。また、球や球殻で回転軸が中心を通る場合はいくらになるでしょう？計算してみてください。）

したがって、回転の運動方程式は

$$cMR^2 \frac{d\omega}{dt} = RF$$

あるいは

$$\frac{1}{2} MR^2 \frac{d\omega}{dt} = RF$$

（b）
まず、図 2.3 に示すように、v と ω には $v = R\omega$ の関係があります。（ω の単位は radian s^{-1} です。radian の定義を確認しておこう。）

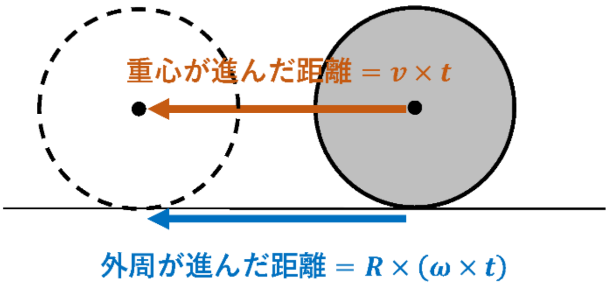

図 2.3：　ある時間 t の間に重心と外周が進んだ距離を考えると、円柱がすべらず転がる場合には $v = R\omega$ が成り立つことが分かる。

［解法 1］
問（a）で求めた重心と回転の運動方程式から静止摩擦力 F を消去し、$v = R\omega$ の関係を使うと、加速度 $\frac{dv}{dt}$ は、

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g \sin\theta}{1+c}$$

となります。これは時間によらない定数であり、円柱状物体は水平面に達するまで等加速度直線運動をおこなうわけです。

初速度 v_0 =0 で等加速度 $a = \frac{g\sin\theta}{1+c}$ で経過時間 $t = T$ 後、距離 $x = L = \frac{h}{\sin\theta}$ 進んでおり、その時の速さを $v = V$ とすると、これらの関係は以下の通りとなります。

$\frac{dv}{dt} = a$ を積分して $v = v_0 + at$

$\frac{dx}{dt} = v$ を積分して $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

両式に v_0 =0 を代入したのち t を消去すると、x と v の関係式 $v^2 = 2ax$ が得られるので、答えは、

$$V = \sqrt{2aL} = \sqrt{\frac{2}{1+c}}\sqrt{gh} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{gh}$$

つまり、斜面の角度 θ にはよらず、転がし始めた高さ h つまり初めに与えた位置エネルギーのみによることが分かります。また、係数 c に着目すると、質量が同じであれば、円筒（$c = 1$）よりも円柱（$c = \frac{1}{2}$）の方が速さが大きくなることも分かります。慣性モーメントが小さい円柱（円筒に比べて質量が薄く広く分布している）の方が回転が速くなり、したがって、$v = R\omega$ の関係により重心の速さも大きくなるわけです。（慣性モーメントは回転に対する慣性の大きさを示す量であり、回転のしにくさを表しています。慣性の大きさを示す質量に対応した量です。）

［解法２］
さらに、この問題を、力学的エネルギーの保存則で考えてみよう。

初めに与えた位置エネルギーが、重心の並進運動の運動エネルギーと円柱の回転運動のエネルギーとに分割されること、および、すべらないで転がるという条件から、水平面に到達した時点での並進運動の速さ V と回転運動の角速度 Ω との間に $V = R\Omega$ の関係があること、を利用します。

- 初めに与えた位置エネルギー：Mgh（落差が h なので半径 R の分は考える必要ない）
- 重心の並進運動の運動エネルギー：$\frac{1}{2}MV^2$
- 円柱の回転運動のエネルギー：$\frac{1}{2}I\Omega^2$

したがって、

$$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2$$

$I = cMR^2$（$c = \frac{1}{2}$）、$\Omega = \frac{V}{R}$ を代入して、

$$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}(cMR^2)\left(\frac{V}{R}\right)^2$$

したがって、

$$V = \sqrt{\frac{2}{1+c}}\sqrt{gh} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{gh}$$

(c)
まず、図 2.4 で、穴のあけ方にはさまざまなやり方がありうることを確認しておきます。

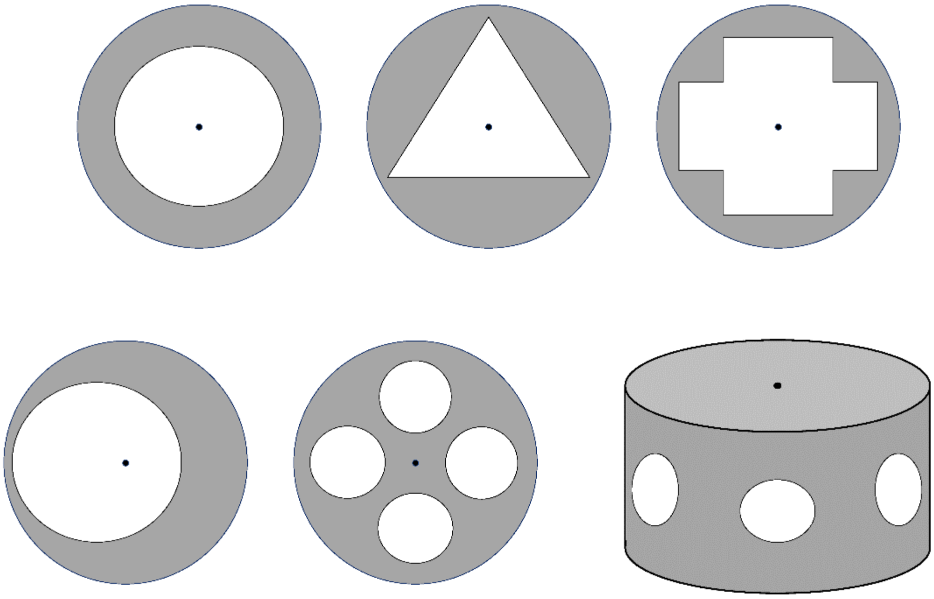

図 2.4：　さまざまな穴のあけ方の例。黒点は回転軸の位置を示す。

重心が等加速度で運動するには、円柱状物体が等角速度で回転する必要があります。そのためには質量の分布が回転軸に対して対称となっている必要があります。別の言い方をすると、物体の重心と回転軸が一致している必要があります。（逆に考えてみましょう：もしも重心と回転軸がずれていたとすると、重心自体が円運動してしまいます。その場合、物体の回転にともなって物体の位置エネルギーが変化するので、運動エネルギーも変化します。つまり、等加速度運動しないことになります。）

転がり落ちる速さを遅くする、ということは、問（b）後半の力学的エネルギー保存則の議論にしたがって考えてみると、元の位置エネルギーが、重心の並進運動の運動エネルギーよりも、回転エネルギーの方になるべく多く配分されるようにすればよいわけです。そのためには、慣性モーメント I が選択肢の中で一番大きくなるようにすればよいわけです。このことは、問（b）の答えにおいて、係数 c をなるべく大きくすればよいというところからも読み取れます。

慣性モーメントの定義式 $I \equiv \sum m_i {r_i}^2$ を見ると、I を大きくするには r_i を大きくする、つまり、回転軸からなるべく遠いところを残せばよいことが分かります。

以上の考察から、図 2.4 の選択肢の中の左上隅のあけ方がよいということが分かります。穴をあけた後の質量 M' が $M' = \frac{1}{2}M$ となるような穴の半径 R' は、

$$\rho\pi(R')^2 H = (\rho\pi R^2 H) \times \frac{1}{2}$$

より、$R' = \frac{1}{\sqrt{2}}R$ となります。その時の慣性モーメント I' は、

$$I' \equiv \sum m_i\, r_i{}^2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}R}^{R} (\rho \cdot \Delta V) \cdot r^2$$

と計算するわけですが（積分の範囲に注目）、定義式を見れば、穴をあける前の慣性モーメント $I = \frac{1}{2}MR^2$ から穴の分 $\frac{1}{2}M'(R')^2 = \frac{1}{8}MR^2$ を引き算すればよい、ということが分かります。したがって、

$$I' = \frac{3}{8}MR^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{M}{2}\right)R^2$$

ここで係数 c （慣性モーメント比）が $c = \frac{3}{4}$ となっていることをあらわに示しました。(円柱（$c = \frac{1}{2}$）よりもより円筒（$c = 1$）に近づいたことが分かります。)

したがって、問（b）の答えを参照するとこの時の速さ V は、

$$V = \sqrt{\frac{2}{1+c}}\sqrt{gh} = \sqrt{\frac{8}{7}gh}$$

以下、おまけの問題です。考えてみてください：

- もしも穴をあける際に、図 2.4 の左下隅の例のように、回転軸からずらした場合、どのような運動になるでしょうか？

問３【物体の運動】

（a）
キタキツネが歩かなければならない距離 L は $L=\frac{a}{\cos\theta}$ です。これを速さ v で歩くので、かかる時間 T は、

$$T=\frac{L}{v}=\frac{a}{v\cos\theta}$$

（b）
キタキツネが限界速さ v_c で進むと、道路を渡り切った時にちょうど除雪車が同じ地点に到達することになります。つまり、除雪車は、時間 $T=\frac{a}{v_c\cos\theta}$ 後に、$d+a\tan\theta$ だけ進む、ということになります。従って、

$$VT=V\frac{a}{v_c\cos\theta}=d+a\tan\theta$$

が成り立ちます。これを整理すると、

$$v_c=\frac{aV}{a\sin\theta+d\cos\theta}$$

（c）
v_c の式において、変数は θ のみで、他は定数です。つまり、道の幅 a と除雪車からの距離 d は決まっていて、あとは θ を調整することで、なるべくゆっくり歩いて渡る、というのが問題の設定です。

v_c を最小にする θ を求める、ということは、v_c の式の分母 $y=a\sin\theta+d\cos\theta$ を最大にする θ を求める、ということです。ここではまず数学的に解いてしまうことにしてみましょう。y の極大値を与える θ が存在するはずだろうと考え、

$$\frac{dy}{d\theta}=0$$

を満たす θ を求めます。（y の極値を与える θ を求めたい時の定石です。）すると、

$$a\cos\theta-d\sin\theta=0$$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{a}{d}$$

$$\therefore\ \theta=\tan^{-1}\frac{a}{d}$$

図 3.1 より、$\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}$ 、$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}$ なので、$y = \sqrt{a^2+d^2}$ であり、限界速さ v_c は、

$$v_c = \frac{aV}{\sqrt{a^2+d^2}}$$

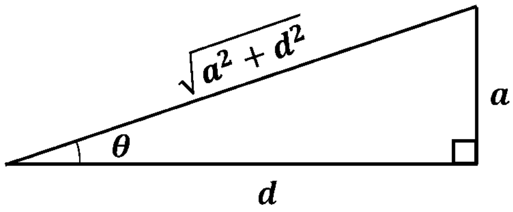

図 3.1： $\tan\theta = \frac{a}{d}$ を満たす a、d、θ の関係。

答えが出たところで、あらためて問題を考えてみましょう。たとえば、極端な場合を考えてみて、答えがおおまかには（定性的には）合っていることを確認してみましょう。

(i)　除雪車がずっと遠くにいる場合、つまり、$d \gg a$ の場合

この場合は、道を斜め横断する必要はなく、最短距離を横断すればよいわけです。たしかに、得られた答えは、$\tan\theta = \frac{a}{d} \to 0$ つまり $\theta \to 0$ となります。また、その時 $v_c \to \frac{a}{d}V$ であり、これは式変形してみれば、$\frac{d}{V} \to \frac{a}{v_c}$ 、つまり、除雪車が距離 d を進む時間とキタキツネが距離 a 進む時間が同じになれば、キタキツネが道路を渡り切った時にちょうど除雪車が同じ地点に到達することになります。

(ii)　除雪車が比較的近くにいる場合

この場合は、除雪車から少し逃げる方向に斜め横断すれば、引かれないで済む可能性が出てきます。ただし、あまり斜めすぎると（θ が大きすぎると）今度は除雪車に追いつかれてしまうリスクが出てきます。したがって、ちょうどよい中間的な θ の値が存在するだろう、ということになります。

(iii)　除雪車がすぐそばにいる場合、つまり、$d \ll a$ の場合

この場合は、除雪車の速さ V よりもはやく、大きく（θ 大で）斜め横断することで、逃げ切る作戦をとることを考えるでしょう。得られた答えからは、$\tan\theta = \frac{a}{d} \to \infty$ つまり $\theta \to \frac{\pi}{2}$ （90°）となることが確認できます。さらにその時 $v_c \to \frac{V}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{a}\right)^2}}$ であり、V に近いが V より若干小さい限界速さ v_c が存在する、ということになります。d がゼロでなく有限であれば、V より若干小さくても無限大の時間をかければ逃げ切れるのです。

(iv)　さらに別の視点からも考察できないか、考えてみてください。（たとえば、除雪車の速さ V とはじめの除雪車との距離 d との関係など。）