2021 年度入学試験（2020 年 8 月オンライン実施）　課題１：必答課題

問１【ベクトル】

まずは、「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」の「2 ベクトル」を読んでください。そこには「ベクトル演算をする場合には、デカルト座標系（直交直線座標系、直角座標系、$x-y-z$ 座標系）での成分表記を用いるのが簡便である。」と書かれています。煩雑にはなるかもしれませんが、成分表記して、ひとつひとつ間違えないように注意して我慢強く計算を進めていけば、確実に答えにたどりつきます。

また、ひとつ前の年の8月の試験（「2020年度入学試験（2019年8月実施）　問題１：必答問題」の問３）の解答例・解説も参照してください。以下ではそちらに書いたやり方（表記のしかた）で進めていきます。

なお、それぞれの問題の演算結果が、ベクトルになるか、スカラーになるか、にまず注意しましょう。また、この問題は、たとえば（a）を間違えると全滅となりますから、いつもよりもさらに慎重になって、ひとつずつ確認しながら進めましょう。

(a)

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left(-e^{-(x^2+y^2+z^2)}\right) = \begin{pmatrix} 2x\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 2y\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 2z\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} 2e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

(b)

$$v = k \times \nabla\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 2y\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 2z\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 2x\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} 2e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

(c)

$$\nabla \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2y\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 2x\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-2y)(-2x)\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} + (2x)(-2y)\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} = 0$$

(d)

$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2y\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 2x\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z}\left(2x\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(-2y\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-2y\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(2x)(-2z)\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ (-2y)\,(-2z) e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 2\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} + (2x)(-2x)\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} - \left(-2\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\right) - \left((-2y)(-2y)\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4xz \\ 4yz \\ -4x^2 - 4y^2 + 4 \end{pmatrix} e^{-(x^2+y^2+z^2)} = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -x^2 - y^2 + 1 \end{pmatrix} 4e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

問２【行列】

まず、解答例は

固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 、固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ 、

固有値 $\lambda = 3$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

です。以下に解説を書いていきます。

2×2 や 3×3 の行列 A の固有値 λ と固有ベクトル u を求める問題はよく出題されますので、手順を確認し、実際の問題をいくつか解いて練習しておきましょう。ひとつ前の年の 8 月の試験（「2020 年度入学試験（2019 年 8 月実施）　問題１：必答問題」の問１）の解答例・解説も参照してください。

今回は 3×3 の行列です。単位行列を $\boldsymbol{E}$ と書くことにします。

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ は、以下の式から計算します。

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$$

ここで、$|\cdots|$ の記号は、中の行列の行列式（の値を算出する）、という意味です。

3×3 の行列の行列式は、まずは模式的に表記すると、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

つまり、橙、青、緑、の順に、前者はプラス、後者はマイナスで、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

となります。

さて、2×2 と 3×3 の正方行列の行列式は、このように「サラスの方法 / たすきがけの方法」で暗記しましょう。しかし 4×4 以上の正方行列にはこの方法は使えません。
ここで、$n \times n$正方行列の行列式の定義（ライプニッツの明示公式）を確認しておきましょう。

$$|\boldsymbol{A}| = \det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^P \left(a_{1p_1} \ a_{2p_2} \ \cdots \ a_{np_n} \right)$$

ここに、p_1, p_2, $\cdots$ p_n は 1, 2, $\cdots$ n を置き換えたもので、2 字ずつ交換すること（つまり 1 回の交換）を何回か行って得られるその回数を P とし、あらゆる置き換え方について和をとるものとする。

つまり、もとの行列の行を交換して、すべての置き換え版を作り、それぞれについて、対角成分の積をとる。それらを、もとからの交換の回数に応じて-1倍したり$+1$倍したりして足し合わせる、というわけです。置き換え版の数はもとも含めて、2×2 行列の場合は 2 つ、3×3 行列の場合は 6 つとなりますね。（4×4 ではいくつになりますか？）2×2 と 3×3 の正方行列について、上記の定義に従って、行列式を算出してみましょう。

さて、今回の問題では、具体的には、

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

ですので、$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$より

$$(1-\lambda)^3 - 2 + 2 - \{-(1-\lambda) + 4(1-\lambda) + (1-\lambda)\} = 0$$

ここで、完全に 3 次方程式にばらしてしまわずに、$(1-\lambda)$ でくくれることに気付くことが大事ですね。以下のように順番に変形していって、

$$(1-\lambda)\{(1-\lambda)^2 - 4\} = 0$$

$$(1-\lambda)\{(1-\lambda) - 2\}\{(1-\lambda) + 2\} = 0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

したがって、λ は 1 と -1 と 3 とでます。
つまり、固有値は 1 と -1 と 3、です。

次に、固有値ひとつずつについて、それぞれの固有ベクトルを求めます。（この過程で固有

値の計算の確かめ算もできることになります。固有ベクトルが求められない場合は固有値が間違っています。)
固有値と固有ベクトルには、以下の式を満たす、という性質があります

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{u} = 0$$

ですので、そのように式を立てて$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ の u_1 と u_2 と u_3 の値を求めます。

$\lambda = 1$ の場合：

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$$

これより、$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 。

$\lambda = -1$ の場合：

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$$

これより、$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ 。(これはじっと眺めているだけではたぶん解けなさそう(ひらめかなさそう)です。手抜きをせずに、連立方程式を立てて、ちゃんと解かないといけなさそうです。つまり、$2u_1 + 2u_2 + u_3 = 0$ および $-u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$ から、まずたとえば u_3 を消去して、などという手順にて。)

$\lambda = 3$ の場合：

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$$

これより、$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

問 3 【微分方程式】

「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」の一番最後に大変に重要なことが書かれています：

「微分方程式を解いたときには、得た解を元の式に代入して、それを満足するかどうかチェックすることをお勧めする。」

確かめ算やクロスチェックは、テストや試験だけでなく、研究活動においていつも非常に重要です。

また、「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」の式(31)から始まる「発展」のところが今回の問題に直接関連していますので、あわせて読んでください。

今回の問題は、式の形や条件などからまず $x = e^{\lambda t}$ の形の解を考えて代入してみると、

$$\lambda^2 + a\lambda + b^2 = 0$$

の解が

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$$

であること、さらに、$a^2 - 4b^2$ の正負で場合分けすることになるのかもしれない、と見抜きます。

$a^2 - 4b^2 > 0$ の時、λの解は 2 つの実数となり：

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$$

$a^2 - 4b^2 < 0$ の時、λの解は 2 つの虚数となり（ルート$\sqrt{}$ の中が負なので、ここが虚数)：

$$\lambda = \frac{-a \pm i\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$$

ここで、$i = \sqrt{-1}$ （$i^2 = -1$）は虚数単位。（つまり、振動解が絡みそうですね。）

ここまで、考えておいた上で、

$$\lambda^2 + a\lambda + b^2 = 0$$

を満たす λ を、簡単のため、λ_1 、λ_2 と書くことにすると（具体的な値は上に記した通りです)、与えられた微分方程式の一般解は、

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

となります。C_1 と C_2 は任意の定数です。($\frac{d^2x}{dt^2}$ までを含む 2 階の微分方程式ですから、一

般解は、2 つの任意定数 C_1 と C_2 を含まないといけません。）また、念のため、ですが、これをもとの微分方程式に代入してみると、たしかに方程式が成り立っていますね？

$$\frac{dx}{dt} = C_1\,\lambda_1\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,\lambda_2\,e^{\lambda_2 t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = C_1\,{\lambda_1}^2\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,{\lambda_2}^2\,e^{\lambda_2 t}$$

ですので。(続きを自分で確認してみましょう。)

次に、初期条件が (2 つ) 与えられていますので、定数 C_1 と C_2 が決まることになります。
$x(0) = 1$ より、

$$C_1 + C_2 = 1$$

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$ より、

$$C_1\,\lambda_1 + C_2\,\lambda_2 = 0$$

したがって、

$$C_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

となるので、

$$x = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\,e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,e^{\lambda_2 t} = \frac{-\lambda_2\,e^{\lambda_1 t} + \lambda_1\,e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

さらに、a や b を使って表記すると、$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{a^2 - 4b^2}$ などより、

$$x = \frac{e^{-\frac{a}{2}}}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}e^{\frac{\sqrt{a^2-4b^2}}{2}} + \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{a^2-4b^2}}{2}}\right)$$

となります。

さて、ここまでで、結局のところ、$a^2 - 4b^2$の正負による場合分けは、必要とはなりませんでした。もしかしたら、出題者は本当はさらに「$x(t)$の概形を描け」と問いたかったのかもしれません。各自で、$a^2 - 4b^2 > 0$ の時と、$a^2 - 4b^2 < 0$ の時とで場合分けして検討してみてください。