2020 年度入学試験（2019 年 8 月実施）問題 2

問 1 【衝突】

（a）運動量保存則（$mv_1 + m \cdot 0 = mV_1 + mV_2$）と、エネルギー保存則（$\frac{1}{2}m{v_1}^2 + \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = \frac{1}{2}m{V_1}^2 + \frac{1}{2}m{V_2}^2$）より、$V_1 = 0$、$V_2 = v_1$。

注：　上記のように粒子 1 と 2 の質量を区別せずに両方とも m として式をたてると、粒子 1 と 2 の区別がつかず、$V_1 = v_1$、$V_2 = 0$ も上のふたつの式を満たします。しかし、設定より粒子 1 は粒子 2 を追い越してはいけない、つまり $V_1 \leq V_2$ という条件があります。出てきた答えを検証する際、実際の状況を少し想像してみるとよいでしょう。可能なら実際に実験してみる、少なくとも図を描いて考えるようにするとよいでしょう。
練習問題：　粒子 1 の質量を m_1 衝突前の速さを v_1、粒子 2 の質量を m_2 衝突前の速さを v_2、として、一般的な場合の V_1 と V_2 を一度自分で導出してみておこう。

（b）$\overrightarrow{V_1}$ と $\overrightarrow{V_2}$ が直交していることを示すためには、両者の内積がゼロ、つまり $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = 0$ を示せばよい。（ベクトルのまま演算を進めることが少し心配だったりするなら、成分をあらわに書いてみるとよいでしょう。）

運動量保存則は$m\overrightarrow{v_1} = m\overrightarrow{V_1} + m\overrightarrow{V_2}$、エネルギー保存則は$\frac{1}{2}m|\overrightarrow{v_1}|^2 = \frac{1}{2}m\left|\overrightarrow{V_1}\right|^2 + \frac{1}{2}m\left|\overrightarrow{V_2}\right|^2$。

前者より$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$なので、$|\overrightarrow{v_1}| = \left|\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}\right|$、

したがって　$|\overrightarrow{v_1}|^2 = \left|\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}\right|^2 = \left|\overrightarrow{V_1}\right|^2 + 2\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} + \left|\overrightarrow{V_2}\right|^2$

（最後の等号が正しいことは、成分表示をして確かめておこう。$\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|^2 = a^2 + b^2$）

この式とエネルギー保存則の式を見比べて、$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = 0$、つまり、$\overrightarrow{V_1}$と$\overrightarrow{V_2}$は直交している。

（次のページにこの問題の解説が続きます。）

問１（b）について、前のページでは、内積がゼロという性質を使って数学的に解きましたが、もう少し物理的に、あるいは少なくとも幾何学的に理解することはできないでしょうか。以下の図 1-1、図 1-2、図 1-3 にて、衝突後の粒子 1 の速度 $\overrightarrow{V_1}$ を任意に与えた時 $\overrightarrow{V_2}$ がどうなるべきか、解説します。

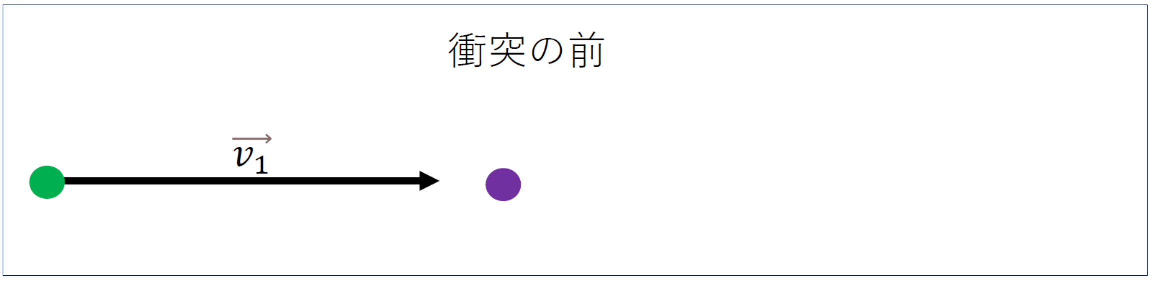

図 1-1：衝突前の状態。

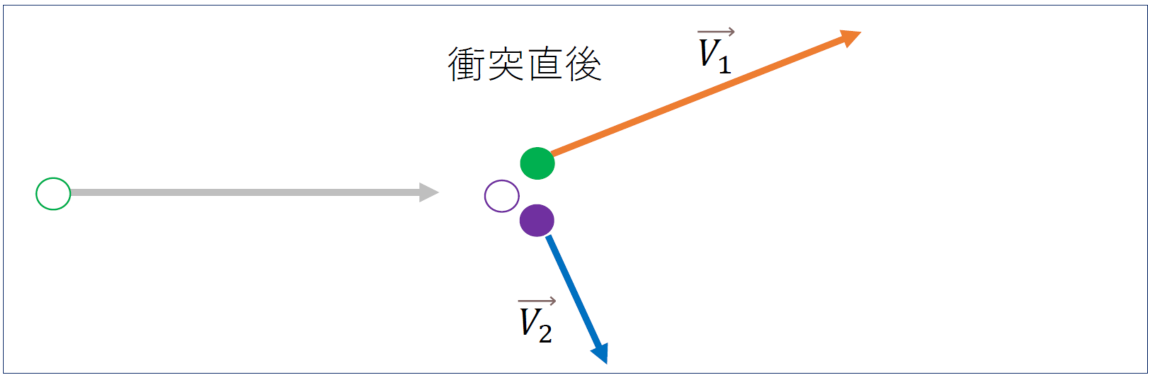

図 1-2：衝突直後の状態。

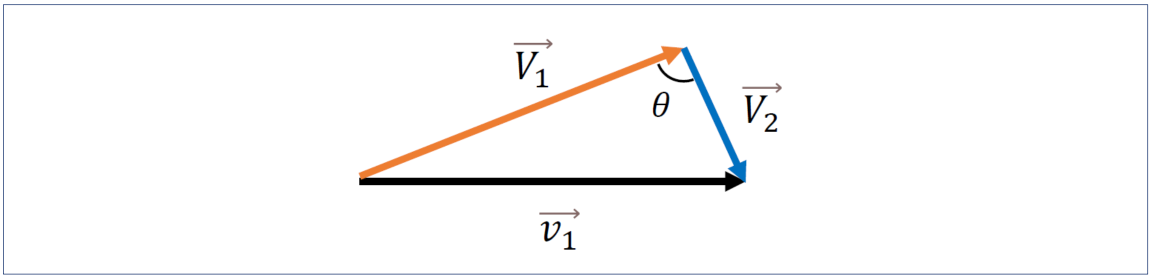

図 1-3：運動量保存則から要請される $\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{V_1}$、$\overrightarrow{V_2}$ の関係の図。運動量保存則より 3 つのベクトルはこのように $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ を満たす三角形をなさなければならない。($\overrightarrow{v_1}$ の方向を x 軸、直交する方向を y 軸にとり、それぞれの方向について別々に運動量保存則を考えてみよう。）さらに、エネルギー保存則の要請より $|\overrightarrow{v_1}|^2 = \left|\overrightarrow{V_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{V_2}\right|^2$ なので、3 つのベクトルは角度 θ が 90 度である直角三角形をなしていなければならない。つまり、$\overrightarrow{V_2}$ は $\overrightarrow{V_1}$ と直交する。

問２【円すい振り子】

まず、等速円運動における向心力（向心加速度）を復習しておきます。

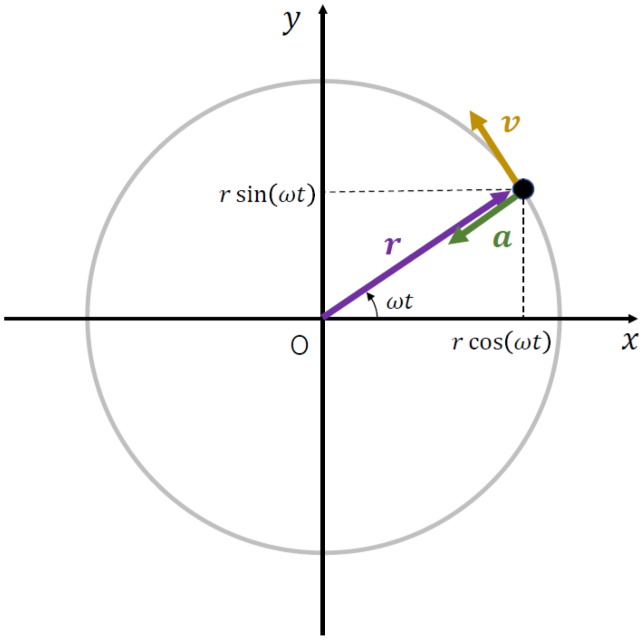

図 2-1：等速円運動する質点の位置ベクトル、速度、加速度（向心加速度）。

図 2-1 に示すように、原点 O を中心とする半径 r の円周上を角速度 ω [radian/s] で等速円運動する質量 m の質点を考える。質点は時刻 t において、円周上の角度 ωt の位置にいる。

この質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ とすると、

$$x(t) = r\cos(\omega t)$$
$$y(t) = r\sin(\omega t)$$

と表される。（ここでは初期位置をx軸上の $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ としてある。）

速度は、$\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}$ より

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -r\omega\sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = \frac{d}{dt}y(t) = r\omega\cos(\omega t)$$

速さ v は $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = r\omega$、また、速度の方向は円の接線方向であり（$\boldsymbol{r}$ と$\boldsymbol{v}$ の内積がゼロ）向きが図のようになっていることを確認しよう。

最後に、加速度（向心加速度）は、$\boldsymbol{a}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}$ より

$$a_x(t)=\frac{d}{dt}v_x(t)=-r\omega^2\cos(\omega t)=-\omega^2x(t)$$

$$a_y(t)=\frac{d}{dt}v_y(t)=-r\omega^2\sin(\omega t)=-\omega^2y(t)$$

加速度（向心加速度）の大きさは $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}=r\omega^2=v\omega=\frac{v^2}{r}$、向きは位置ベクトルと逆向き（円運動の中心 O の向き）になっている。

（a） 図 2-2 に、おもりにかかっている力、重力と糸の張力を示す。鉛直方向の力のつりあいとして、$T\cos 30^\circ=mg$が成り立つ。$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$であるから、$T=\frac{2}{\sqrt{3}}mg$。

（b） 円運動の半径をRとすると向心力 $ma=mR\omega^2$ は $ma=mR\omega^2=T\sin 30^\circ$（あるいは$ma=mR\omega^2=mg\tan 30^\circ$）。$R=l\sin 30^\circ$ と（a）で求めた T を代入すると $l\omega^2=\frac{2}{\sqrt{3}}g$。

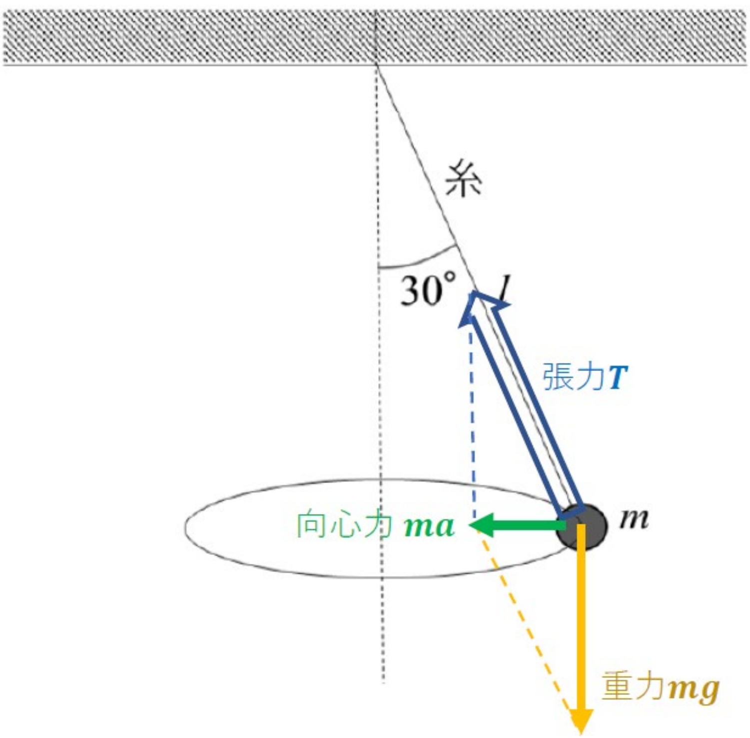

図 2-2：円すい振り子においておもりにかかっている 2 つの力、重力と糸の張力。

前ページの図 2-2 は、この問題を「地上に静止している人が見た立場」で考えたものであり、おもりには 2 つの力、重力と糸の張力だけが働いており、円運動をもたらしている向心力 $mR\omega^2$ は（重力と糸の張力の合力である）$T\sin 30^\circ$あるいは$mg\tan 30^\circ$に等しい、とみることになります。

いっぽう、この問題を「おもりとともに回転している人が見た立場」で考えることにすると、おもりは静止していますので、向心力とつり合う外向きの力が（慣性力・みかけの力として）存在することになります。それが 遠心力 $mR\omega^2$ です。つまり、図 2-3 に示すように、重力と糸の張力と遠心力、3 つの力がつりあって、おもりは静止しているのです。（同じ答えが導かれます。確かめてみましょう。）

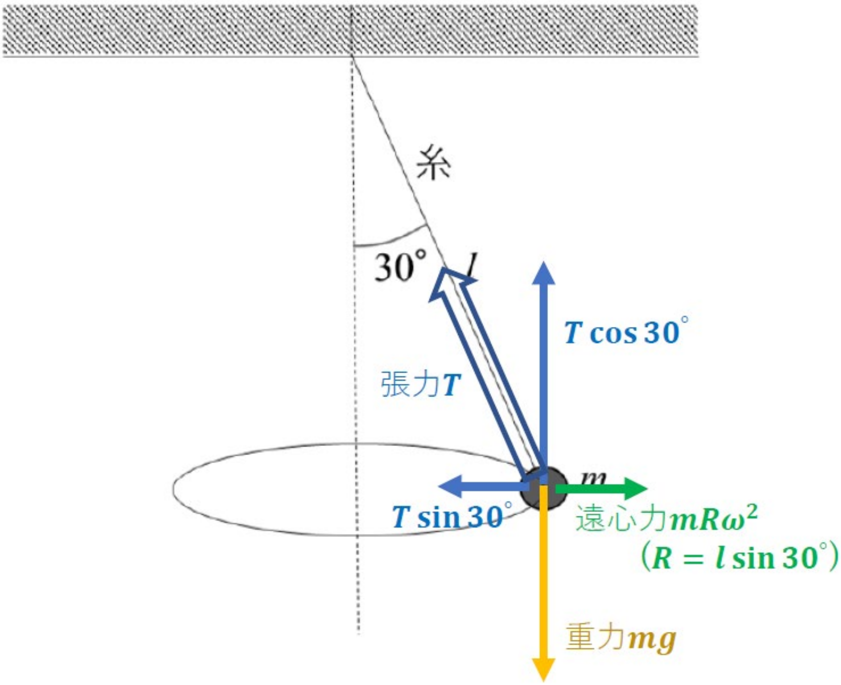

図 2-3：「おもりとともに回転している人が見た立場」で円すい振り子の問題を考える。

（遠心力は、加速度運動する系（の中）における力、「みかけの力」あるいは「慣性力」と呼ばれる力のひとつ。ちなみに、回転する系（たとえば自転する地球）におけるみかけの力には、遠心力とコリオリ力（転向力）（とオイラー力）があり、コリオリ力は大気や海洋の運動（風や海流）を考える上で非常に重要です。）

問３【熱力学の基礎】

（a）【誤】：
まず、気体温度が同じということは、気体の平均運動エネルギー $\frac{1}{2}m\langle\vec{v}^2\rangle$ が同じということである。
（このことはミクロの力学（気体分子運動論）とマクロの熱力学の関係より導かれる。気体の圧力を $\langle\vec{v}^2\rangle$ であらわしたのち、理想気体の状態方程式と見比べると、$\frac{1}{2}m\langle\vec{v}^2\rangle = \frac{3}{2}k_BT$が導かれる。ここで、$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K はボルツマン定数（$R = 8.31$ J/(mol・K)は一般気体定数、$N_A = 6.02 \times 10^{23}$はアボガドロ数）である。また、この式（ $\frac{1}{2}m\langle\vec{v}^2\rangle = \frac{3}{2}k_BT$ ）は、統計力学からも導かれる。）

次に、水素分子 H_2 の分子量は 2、酸素分子 O_2 の分子量は 32 である。（分子量とは、1 分子の質量の統一原子質量単位に対する比である。）つまり、水素分子の質量は酸素分子の質量の 16 分の 1 である。両者の気体温度が等しい、つまり $\frac{1}{2}m\langle\vec{v}^2\rangle$ が等しいことから、水素分子の $\langle\vec{v}^2\rangle$ は酸素分子のそれより 16 倍大きい、つまり平均の速さは 4 倍大きいことになる。

（b）【誤】：全ての物体（固体、液体、気体）で起こる。

（c）【正】

（d）【誤】：水蒸気（気体）ではなく、液体の水である。

（e）【誤】：分子量に依らず一定となる。