

2013 年度入学試験 (2011 年 8 月実施) 問題 2

問 1

(a) 小石の運動方程式は、両辺を質量で割ると

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = -g$$

$t = 0$ での初期位置と初期速度は、 $X = Y = 0, dX/dt = u_0, dY/dt = v_0$ 。物体の方程式は、両辺を質量で割ると

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = -g$$

$t = 0$ での初期位置と初期速度は、 $\eta = h, d\eta/dt = 0$ 。これらを解くと、

$$X = u_0 t, \quad Y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad \eta = h - \frac{1}{2} g t^2.$$

(b) 小石を物体の方向に放ったので、物体の x 座標を L とした時、 $h/L = v_0/u_0$ 。小石が距離 L 進むのに要する時間は $T = L/u_0$ 。その時の Y は

$$Y(L/u_0) = \frac{v_0}{u_0} L - \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{u_0} \right)^2 = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{u_0} \right)^2$$

他方、物体の y 座標 η は、 $t = L/u_0$ を代入すると

$$\eta(L/u_0) = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{u_0} \right)^2.$$

$Y(L/u_0)$ と同じになり、命中することがわかります。

問 2

(a) 重力の斜面を下る向き成分は $mg \sin \theta$ 、同じく摩擦力は、垂直抗力が $mg \cos \theta$ なので、 $-mg\mu \cos \theta$ 。その合力 $mg(\sin \theta - \mu \cos \theta) > 0$ より、 $\tan \theta > \mu$ が求める条件。

(b) 斜面を下る距離は $\frac{h}{\sin \theta}$ 。仕事は力の距離による積分 (力が一定であれば、力 \times 距離) なので、求める仕事 W は

$$W = mgh \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\sin \theta} = mgh(1 - \mu \cot \theta).$$

(c) 運動エネルギーが W だけ増加するので、求める速さを v とすると、

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + W.$$

よって

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh(1 - \mu \cot \theta)}$$

問 3

(a) 圧力は、大気圧 + ピストンに働く単位面積当の重力なので、

$$p = p_{atm} + \frac{Mg}{S} .$$

体積が V_0 なので、その時の温度を T_0 と書くと、理想気体の状態方程式 $pV = nRT$ より、

$$T_0 = \frac{(p_{atm} + Mg/S)V_0}{nR}$$

(b) 気体がピストンにする仕事 W は $\int_{V_0}^{2V_0} p dV$ 。圧力は一定なので、

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} p dV = pV_0 = \left(p_{atm} + \frac{Mg}{S} \right) V_0 .$$

(c) 熱力学第一法則は、気体に加えられた熱量を Q 、気体が外部にした仕事を W とし、初期の内部エネルギーを E_0 、熱を加えられ、仕事をされた後の内部エネルギーを E_1 とすると

$$E_1 - E_0 = Q - W$$

と書けます。理想気体の内部エネルギーは温度のみにより、変化後の温度を T_1 とすると

$$E_1 - E_0 = \int_{E_0}^{E_1} n c_v dT = n c_v (T_1 - T_0) .$$

T_1 は $2pV_0 = nRT_1$ より、 $T_1 = 2T_0$ 。したがって、

$$Q = (E_1 - E_0) + W = n c_v T_0 + W = \left(\frac{c_v}{R} + 1 \right) \left(p_{atm} + \frac{Mg}{S} \right) V_0$$