

2012年度入学試験(2011年8月実施) 問題2

問1 この問題を解く上で必要なのは、(a) では力が与えられた時に方程式が立てられること、終端速度とは何かを理解していること。(b) では、(a) に加えて物体と面の間の摩擦力について知っていることが必要です。

- (a) スカイダイバーには重力と空気抵抗力が働いています。下向きを速度を v とすると、質量 \times 加速度 = 力なので、運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \kappa A_1 v^2$$

となります。スカイダイバーは落下しながら徐々に速度を増します。速度が増えると空気抵抗が大きくなり、重力と空気抵抗が釣り合うようになります。釣り合えばそれ以上速度は変化しません。その時の速度が終端速度です。この終端速度を v_1 と書いた時、 v_1 は運動方程式の左辺をゼロと置くことによって、

$$v_1 = \sqrt{\frac{mg}{\kappa A_1}}$$

が得られます(微分方程式を解く必要はない)。

- (b) ダウンヒルスキーヤーには重力と空気抵抗と斜面からの垂直抗力とスキーと雪面の間の摩擦力が働いています。斜面に沿って下る方向の速度を v とします。斜面に沿って下る方向の重力の成分は $mg \sin \theta$ 、斜面とスキーの間の摩擦力は垂直抗力 $\times \mu$ 、垂直抗力は $mg \cos \theta$ です。したがって、斜面に沿って下る方向の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta - \kappa A_2 v^2$$

となります。この場合の終端速度を v_2 とすると、(a) と同様の考えに基づき、

$$v_2 = \sqrt{\frac{mg(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{\kappa A_2}}$$

- (c) $v_2 > v_1$ であるためには、

$$\frac{mg(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{\kappa A_2} > \frac{mg}{\kappa A_1}$$

であれば良いので、

$$\frac{A_2}{A_1} < \sin \theta - \mu \cos \theta \simeq 0.5.$$

となります。断面積を半分にすれば、ほぼ同じ速さになることが分かります。

問2 ここで必要となる知識は、ポテンシャルエネルギーとは何かということと仕事率の単位である [W] の定義です。[W]=[J s⁻¹]=[kg m² s⁻³]

- (a) 30万 kW で6時間の電力供給がなされ、その70%が水を上池にあげるのに用いられるので、そのエネルギーは

$$E = 0.7 \times 3 \times 10^8 [\text{W}] \times 6 [\text{時間}] \times 3600 [\text{秒}] = 0.7 \times 3 \times 6 \times 3.6 \times 10^{11} [\text{J}]$$

他方、下池から上池に移されたことによる水の位置エネルギーの変化は、その質量を $M[\text{kg}]$ とすると

$$P = M[\text{kg}] \times 10[\text{m s}^{-2}] \times 200[\text{m}] = M \times 2 \times 10^3 [\text{J}]$$

です。したがって、

$$M = \frac{0.7 \times 3 \times 6 \times 3.6 \times 10^{11}}{2 \times 10^3} = 2.268 \times 10^9 \text{kg}$$

[この問題は桁の大きな計算を要求していますが、大気海洋では、そのスケールが大きいこともあり、桁の大きな量がしばしば現れ、大まかにどういう大きさになるかという計算が要求される場合もままあります。そういう時に、桁の間違いは致命的です。桁を間違わないこと、桁に間違いがないか後でチェックすることも重要です。(なお、上では答えとして4桁の数値を書いています、有効桁数という観点で言えば、2桁書けば十分です)。]

- (b) これは簡単です。揚水する時の効率が70%、発電効率が80%、揚水の時間も発電の時間も同じなので、揚水に用いた電力の56%の出力となります。

$$0.7 \times 3 \times 10^4 \times 0.8 = 16.8 \text{ 万 kW}$$

問3 この問題を解くために必要な知識は、熱伝導において熱は温度の高い方から低い方に伝わるということ、熱流(熱フラックス)の大きさは温度の傾きに比例し、その比例定数が熱伝導率であるということの二つです。ただし、後者は知らなくても、この問題では熱伝導率と熱流 q の単位が与えられていますから、熱流が熱伝導率と温度の傾きの積という関係は推測できます。

- (a) 右向き

(b)
$$q = -\lambda_1 \frac{T - T_1}{d_1} = -\lambda_2 \frac{T_2 - T}{d_2}$$

- (c) (b) の式を T について解くと、

$$T = \frac{d_2 \lambda_1 T_1 + d_1 \lambda_2 T_2}{d_2 \lambda_1 + d_1 \lambda_2}$$

これを直接 (b) の式に代入するか、もしくは (b) の式から

$$T - T_1 = -\frac{d_1}{\lambda_1} q, \quad T_2 - T = -\frac{d_2}{\lambda_2} q,$$

として、両者を足して、 $T_2 - T_1 = -\left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}\right) q$ を得ればよい。答は

$$q = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (T_1 - T_2)}{d_2 \lambda_1 + d_1 \lambda_2}.$$