

北海道大学大学院環境科学院  
地球圏科学専攻  
大気海洋物理学・気候力学コース

令和3年度大学院修士課程入学試験問題  
専門科目

数学・物理学(古典物理学)より計4問出題されている。その全てに解答すること。問題毎に別の答案用紙を使用し、答案用紙には問題番号・受験番号・氏名を記入すること。答案は手書きとする。

また、解答に際して参考にした書籍、ウェブページ等があれば、それについても記すこと。

令和3年2月

## 専門・問題1

問1 直交直線座標系  $(x, y, z)$  における、スカラー関数  $\phi = x^2 + y^2 + z^2$  とベクトル  $\mathbf{a} = (x^2y, -2yz - xy^2, z^2)$  に関して、以下を求めよ。

(a)  $\nabla\phi$

(b)  $\nabla \cdot \mathbf{a}$

(c)  $\nabla \times \mathbf{a}$

問2 次の微分方程式を解け。

(a)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

(b)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 2x + \sin x$

問3 次の方程式をみたす全ての複素数  $z$  を求めよ。 $i$  は虚数単位である。

(a)  $e^z = e^3$

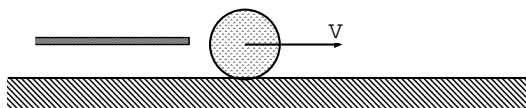
(b)  $e^z = 3 - \sqrt{3}i$

## 専門・問題2

問1 質量  $m$  の質点の、ポテンシャルエネルギー場  $U = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$  の下での運動を考える。ここで、 $\omega$  は定数。運動は  $x$ - $y$  面内に限られており、時刻  $t = 0$  で、 $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $v_x = \frac{dx}{dt} = 0$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt} = v_0$  であったとする。以下の問に答えよ。

- (a)  $x(t), y(t)$  を求めよ。
- (b) この質点の  $x$ - $y$  面上での軌道を  $x$  と  $y$  の関数として求め、それを図示せよ。
- (c) この質点の力学的エネルギー  $E$  と原点に関する角運動量の大きさ  $L$  を求めよ。
- (d)  $E$  を一定とした時の、この質点の軌道の形状の  $L$  依存性について述べよ。

問2 水平で摩擦のある床面上で、質量  $M$ 、半径  $R$  の一様な材質で出来た球を、球の中心を通る線に沿って水平に球突き棒で突いて初速度  $V$  を与える。球は最初は回転していないが、滑りながら回転し、そのうち滑らずに回転するようになる。床面と球の間の動摩擦係数を  $\mu$  とする。以下の問に答えよ。



- (a) この球の重心を通る軸の周りでの慣性モーメントを求めよ。
- (b) 滑りながら回転している時のこの球の運動を支配する方程式を求めよ。
- (c) 滑らずに回転するまでの時間と、その時の球の重心の速度を求めよ。

### 専門・問題 3

以下の問に答えよ。

問 1 次の行列の固有値、固有ベクトルを求め、行列を対角化せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}$$

問 2 問 1 の結果に基づいて座標変換を行い、次の 2 次曲線の概形を描け。ただし、 $x, y$  は実数である。

$$x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 = 16$$

## 専門・問題4

気体中を伝わる音波は圧縮・膨張の振動が伝わる縦波である。以下の問に答えよ。なお、計算の際に必要ながあれば電卓等を用いてよい。

- 問1 気体中の音速  $c$  が  $c = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_s} = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$  となることを式を用いて説明せよ。ただし、 $P$  と  $\rho$  はそれぞれ気圧と密度、 $( )_s$  は断熱過程（エントロピーが一定）、 $\gamma$  は気体の比熱比、 $P_0$  と  $\rho_0$  はそれぞれ音波が伝播する場の気圧と密度を示す。導出の際には、音波に伴う様々な量の変化は十分小さいとせよ。
- 問2 打ち上げ花火の花火玉を地上から初速  $100.0 \text{ m s}^{-1}$  で真上に打ち上げる。花火玉の火薬は最高到達点で爆発するように設定されているとする。花火玉が地上から打ち上がった瞬間から、打ち上げ地点から水平に  $1.00 \text{ km}$  離れたところにいる人が花火が爆発した音を聞くまでに何秒かかるか。音波の伝わる道筋の気温は一定と仮定し、夏 ( $30.0^\circ\text{C}$ ) の場合と冬 ( $-20.0^\circ\text{C}$ ) の場合とでどうなるか答えよ。なお、空気は  $\text{N}_2$  (分圧  $80.0\%$ ) と  $\text{O}_2$  (分圧  $20.0\%$ ) のみで構成されており比熱比は  $\gamma = 1.40$  であるとし、地表における重力加速度の値を  $9.81 \text{ m s}^{-2}$  とする。また、一般気体定数 (普遍気体定数) は  $8.314 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$  である。風は吹いていないものとする。
- 問3 火星の地表において、前問 (問2) と同様に地上から打ち上げ花火を初速  $100.0 \text{ m s}^{-1}$  で真上に打ち上げることを考える。この花火玉も最高到達点で爆発するとする。花火玉が地上から打ち上がった瞬間から、打ち上げ地点から水平に  $1.00 \text{ km}$  離れたところにいる人が花火が爆発した音を聞くまでに何秒かかるか。気温は  $-60.0^\circ\text{C}$  とし、大気組成は  $\text{CO}_2$  が  $100\%$ 、比熱比は  $\gamma = 1.30$  と仮定せよ。火星の半径と質量は  $3396 \text{ km}$ 、 $6.42 \times 10^{23} \text{ kg}$ 、地球の半径と質量は  $6378 \text{ km}$ 、 $5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$  とする。風は吹いていないものとする。
- 問4 問2 と 問3 の結果からどのようなことが言えるか。特筆すべきと思われることを  $100$  文字程度で答えよ。