

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成27年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3~9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成26年8月

問題 1 : 必答問題

問 1 以下の不定積分 (a), (b) を求めよ。

(a) $\int e^{ax} \cos bx \, dx \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

(b) $\int x\sqrt{1+x} \, dx$

問 2 以下の微分方程式 (a), (b) を解け。

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 4x^2$

問 3 直交直線座標系 (x, y, z) におけるベクトル $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 、スカラー関数 $\phi = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ に関して以下を求めよ。

(a) $\nabla \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r})$

(b) $\nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r})$

(c) $\nabla \times (\phi \mathbf{k})$

問 4 次の関係を満たす複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数、 i は虚数単位) の範囲を、横軸に x 、縦軸に y をとって図示せよ。

(a) $|z - 1| \leq 1$

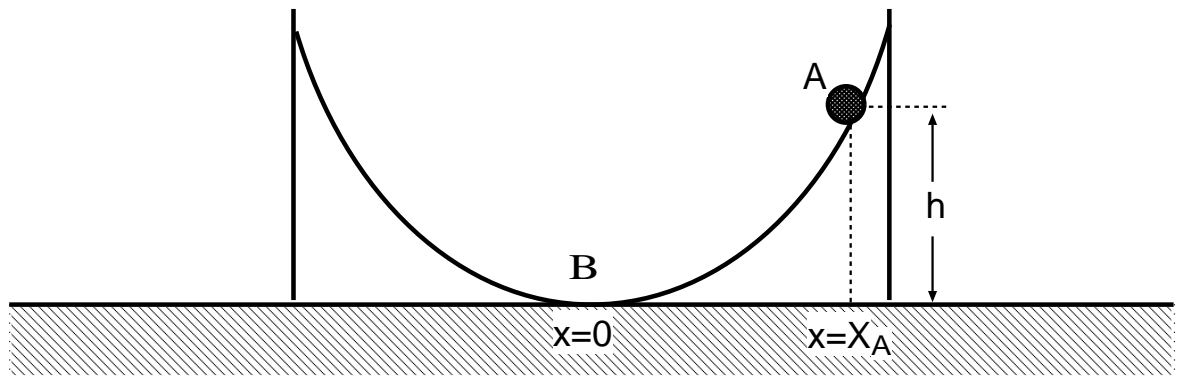
(b) $|z^{-1}| \leq 1$

問題 2 : 必答問題

以下の問 1-3 に答えよ。

問 1 図に示されているような床の上に置かれた左右対称な斜面をもつ台を考える。台は質量 m で均質な材質で作られている。最下点 B の高さをゼロとし、右側斜面の上部、高さ h の点 A から質量 m の質点を初速度ゼロで滑らせる。質点には摩擦は働かないとする。また、重力加速度の大きさを g とする。

- (a) 台が床に固定されているとき、最下点 B での質点の速さはいくらか。さらに、その後、質点はどのように振舞うか述べよ。
- (b) 床と台の間には摩擦がなく、台は自由に動けるとする。水平座標を x とし、質点が A 点にあるときの B 点の位置を原点 ($x = 0$)、その時の A 点の x 座標を $x = X_A$ とする。質点が A 点で静止しているとき、台も静止していたとする。質点が最下点 B に到達したときの質点の速さと B 点の x 座標を求めよ。その後、質点と台はどのように振舞うか述べよ。



図

問 2 以下の (a)-(f) の文章の内、間違っているものを全て列挙し、さらに、どこがどのように間違っているか述べよ。

- (a) 1 モルの理想気体の占める体積は、温度と圧力のみで決まる。
- (b) 理想気体の等温膨張では、外部に仕事をするので、内部エネルギーは減少する。
- (c) 低温の物体ほど波長の短い電磁波を出す。
- (d) ひとつの熱源から熱をとり、これを完全に仕事に変える以外に何の変化も伴わないようにすることは出来ない。
- (e) 熱対流は固体中では生じないが、真空中では生じる。

- (f) 温度は同じだが、比熱容量の異なる 2 つの物体を接触させた場合、比熱容量の大きい物体から比熱容量の小さい物体に熱は移動する。

問 3 ある媒質中を伝播する振幅 a の三角関数型の波

$$u(x, t) = a \sin [q(x - vt)]$$

を考える。ここで、 x は距離、 t は時刻、 q, v は正の定数であり、波の伝播は x 軸に沿う方向である。

- (a) この波の波長と周期を記せ。
- (b) この波の速度 (位相速度) を記せ。また、波の伝わる方向は、 $+x$ 方向か、 $-x$ 方向か。
- (c) 媒質は $0 < x < L$ の領域に広がっており、 $x = 0, L$ にある境界は固定端であるとする。この場合、 $+x$ 方向へ進む波と $-x$ 方向へ進む波の重ね合わせによって定常波が生じる。この時の波の波長と L の関係はどうなるか。また、振動数を L を含む形で記せ。

問題 3 : 選択問題・数学

実対称行列 A, B が共通の直交行列によって対角化されるための必要十分条件は $AB = BA$ である。(直交行列とは逆行列と転置行列が等しくなる行列である。) ここで、このことを確かめるために、次の二つの実対称行列を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

以下の問に答えよ。

問 1 AB と BA を計算し、これらが等しいことを示せ。

問 2 行列 A の固有値 $\lambda_{A1}, \lambda_{A2}, \lambda_{A3}$ と行列 B の固有値 $\lambda_{B1}, \lambda_{B2}, \lambda_{B3}$ を求めよ。ただし、 $\lambda_{A1} < \lambda_{A2} < \lambda_{A3}$ および $\lambda_{B1} < \lambda_{B2} < \lambda_{B3}$ とする。

問 3 固有値 $\lambda_{A1}, \lambda_{A2}, \lambda_{A3}$ に属する固有ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を求めよ。

問 4 これらの固有ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は、 B の固有ベクトルでもあることを示せ。

問 5 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の大きさが 1 となるように正規化したベクトルを用いて、 A と B を対角化する行列 P を一つ求めよ。

問 6 AB を対角化して得られる行列を $\lambda_{A1}, \lambda_{A2}, \lambda_{A3}, \lambda_{B1}, \lambda_{B2}, \lambda_{B3}$ を用いて表せ。

問題 4 : 選択問題・数学

以下の (a)–(c) のそれぞれについて、有界で少なくとも一階導関数まで連続な実関数 f を求めよ。

(a)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f = p(x), \quad p(x) \equiv \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq 1 \text{ のとき、} \\ 0, & \text{それ以外のとき。} \end{cases}$$

$$x \rightarrow \pm\infty \text{ で } f \rightarrow 0.$$

(b) 定義域 $t \geq 0, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

$$x = \pm\frac{\pi}{2} \text{ で } f = 0.$$

$$t = 0 \text{ で } f = (1 + \sin x) \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

(c)

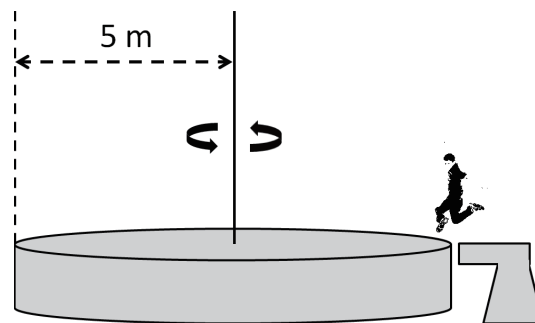
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + p(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad p(x) \equiv \begin{cases} -1, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき、} \\ 1, & \text{それ以外のとき。} \end{cases}$$

$$x \rightarrow \pm\infty \text{ で } f \rightarrow 0.$$

$$t = 0, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } f = \cos \frac{x}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

問題 5 : 選択問題・物理学

- 問 1 位置 r にある運動量 p を持つ質点の角運動量 L は、 $L = r \times p$ で定義される。また、角運動量は、慣性モーメント I と角速度 ω を用いて、 $L = I\omega$ と表される。厚さと密度が一様な質量 M 、半径 R の円盤の中心軸まわりの慣性モーメントは $I = \frac{1}{2}MR^2$ で表されることを示せ。
- 問 2 図のように、質量 2 t、半径 5 m の回転台が垂直な固定軸のまわりを 1 分間に 11 回転している。このとき体重 100 kg の人が台の端にそっと飛び乗って台と一緒に回転すると、台の回転速度は 1 分間に何回転になるか。なお、回転台を支える装置と回転台の間の摩擦は考慮しなくてよい。
- 問 3 その後、この人が台の中心に向かって歩く場合、中心から 1 m の地点に到達したときの台の角速度を rad/s を単位として小数点以下 2 桁まで求めよ。
- 問 4 この人が台に乗る前と後、および台の中心に向かって歩いたとき、それぞれ系全体の力学的エネルギーは増えるか減るか。また、その理由も述べよ。



図：回転台の端にそっと飛び乗る人

問題 6 : 選択問題・物理学

- 問 1 熱力学の第一法則と理想気体の状態方程式から、断熱過程において次のポアッソンの法則

$$TV^{\gamma-1} = \text{一定}$$

が成り立つことを示せ。ここで、 T は温度、 V は理想気体の占める体積、 $\gamma = c_p/c_v = 1 + R/c_v$ は比熱比である。また、 c_p は定圧モル比熱、 c_v は定積モル比熱、 R は気体定数である。

- 問 2 一般に、熱機関としてのガソリンエンジンは、 n モルの理想気体を作業物質とする、図に示すオットー・サイクルで近似することができる。定積加熱中に吸収する熱量 Q_H を温度 T_B と T_C を用いて表せ。同様に、定積冷却中に低温熱源へ排出される熱量 Q_L を温度 T_D と T_A を用いて表せ。

- 問 3 熱機関の熱効率 e は、1 サイクル中に行なった正味の仕事 W の、高温熱源から吸収した熱量 Q_H に対する割合 $e = W/Q_H$ で定義される。オットー・サイクルの熱効率は

$$e = 1 - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}$$

で表されることを示せ。

- 問 4 オットー・サイクル中の最高温度と最低温度を熱源として作動させたカルノー・サイクルの熱効率 $e_c = 1 - T_L/T_H$ は、オットー・サイクルの熱効率よりも大きいことを示せ。ここで、 T_H は高温熱源の温度、 T_L は低温熱源の温度である。

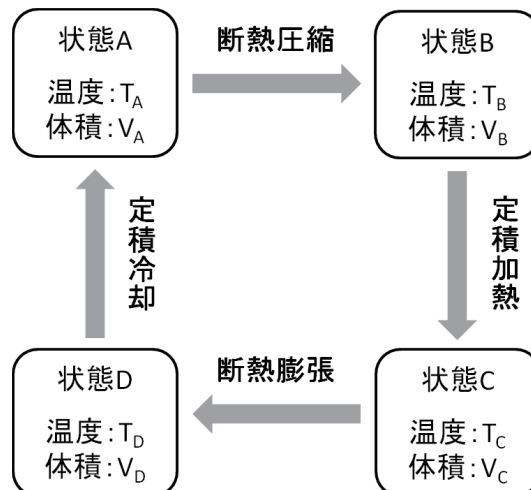


図 : オットー・サイクル

問題 7 : 選択問題・地球物理学

地球規模の放射収支に与える雲の影響について考える。人工衛星計測により大気上端における放射フラックスを観測したところ、全球平均・年平均として下の表 1 中の A 列に示される値を得た。また、同じ観測に基づき、雲のない晴天域のみを対象として、晴天域平均・年平均を求めたところ表 1 中の B 列の値を得た。全球平均・年平均の場合、大気上端における放射収支はバランスしているとして、表に示された値に基づき以下の問に答えよ。

	A列 全球平均	B列 晴天域の平均
地球から宇宙空間に 射出される赤外放射フラックス	234 W/m ²	266 W/m ²
地球に吸収される 太陽放射フラックス	239 W/m ²	288 W/m ²
正味放射フラックス	+5 W/m ²	㉗ W/m ²
アルベド	30%	㉘ %

表 1 : 人工衛星計測による大気上端における放射フラックスとアルベドの年平均値

問 1 ㉗に入る数値をその理由とともに示せ。

問 2 ㉘に入る数値をその理由とともに示せ。

問 3 A 列の正味放射フラックスの値は 5 W/m² であったが、本来はどのような値になるべきか記せ。

A 列と B 列の値の差は放射フラックスに対する雲の効果とみなすことができる。さらに以下の問に答えよ。

問 4 地球から宇宙空間に射出される赤外放射フラックスが雲の効果でなぜ変化するか説明せよ。その結果、雲が赤外放射フラックスに与える効果は地球を暖める効果を持つか、それとも冷やす効果を持つか述べよ。

問 5 地球に吸収される太陽放射フラックスが雲の効果でなぜ変化するか説明せよ。その結果、雲が太陽放射フラックスに与える効果は地球を暖める効果を持つか、それとも冷やす効果を持つか述べよ。

問 6 問 4 と問 5 の議論に基づき地球規模の放射収支に対する雲の効果を議論せよ。

問題 8 : 選択問題・地球物理学

図 1 は、北大西洋のメキシコ湾流を横切る北緯 38 度付近の等緯度線上において観測された水温と塩分の鉛直断面である。ここでコリオリパラメーターを f 、重力加速度の大きさを g とする。図を見て以下の問に答えよ。

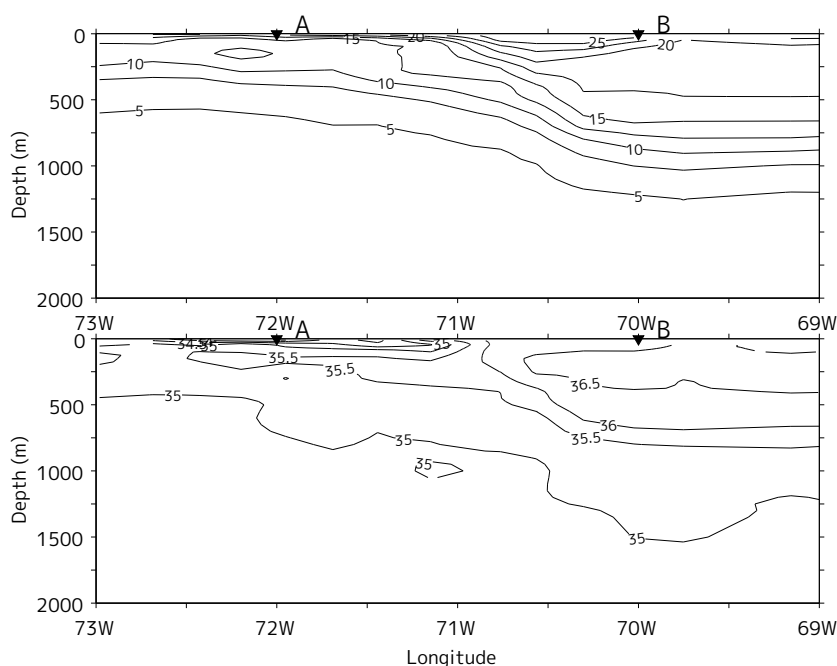


図 1: メキシコ湾流を横切る (上) 水温 ($^{\circ}\text{C}$) と (下) 塩分の断面図。海面から深度 2 km まで、西経 73 度から 69 度までのもの。横軸は経度 (西経)、縦軸は深度 (m) を示す。

問 1 メキシコ湾流のような大規模な流れについては、コリオリ力と圧力傾度力が釣り合っていると考えるよ。この二つの力の釣り合いの状態は何と呼ばれるか？

問 2 コリオリパラメーター f はどのように書き表せるか？地球の自転の角速度を ω 、緯度 ϕ を用いて書き表せ。また北緯 30 度での f の値を求めよ。ここで ω は $7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ とする。

問 3 この観測断面では、水温と塩分それぞれが上層と下層とで異なり、それに伴う鉛直方向の密度差によって海水は安定成層している。点 B (西経 70 度) において 250 m 深と 1000 m 深での密度の差の原因となっているのは、水温の差と塩分の差のどちらか？図 2 に示す水温、塩分と密度の関係図に基づき、それぞれが密度成層に果たす効果について具体的に説明しつつ述べよ。

問 4 点 A (西経 72 度) と点 B の間の海面での力学高度の差を $\Delta\eta$ とし、この断面に直交する流れを v とする。図 1 の最深部では流れがないとすると、点 A と点 B の海面力

学高度はどちらが高いか？またこの $\Delta\eta$ が 1 m であるとしたときの海面での流れ v の向きと速さを求めよ。ただし、この東西断面の緯度は北緯 40 度であるものとし、 g は 10 m s^{-2} 、地球は球形で赤道での経度一度の長さは 100 km としてよいものとする。なお、 $\sin 40^\circ = 0.64$, $\cos 40^\circ = 0.77$ を用いてよいものとする。

問 5 以下の文章について、[] で囲まれた i から iv についてあてはまる適切な語句を記入し、アからコについては選択肢の中から正しい語句を選べ。

メキシコ湾流は大西洋の [i] 境界流である。この流れを駆動しているのは主として風であり、この流れは風成循環の一部として理解される。北大西洋では北緯 15 度付近の低緯度を中心として [ア: 東・西・南・北] 向きの風、北緯 45 度付近の中緯度を中心として [イ: 東・西・南・北] 向きの風が吹いている。海洋表面でのエクマン流は、それぞれ低緯度では [ウ: 東・西・南・北] 向き、中緯度では [エ: 東・西・南・北] 向きとなるため、この間にあたる北緯 30 度付近では表面の海水が [オ: 南下・北上・収束・発散] する。風成循環における内部領域では、海水の [カ: 南北・東西] 輸送量と [ii] が比例するという関係が成り立ち、この関係を [iii] 平衡という。北緯 30 度付近では、[ii] が [キ: 正・負] であるため、[ク: 東・西・南・北] 向きの流れが生じる。この関係を内部領域において [ケ: 南北・東西] 方向に積分して得た流量を [iii] 流量という。この内部領域での流れがもとへ戻るのが [i] 境界であり、[i] 境界流の流量は概ねこの流量と同程度になる。他の大洋にも同じような構造がみられ、北太平洋には [iv] と呼ばれる同じような流れがある。[iv] の流量は、概ね [コ: $4 \times 10^6 \cdot 4 \times 10^7 \cdot 4 \times 10^8$] $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ の程度である。

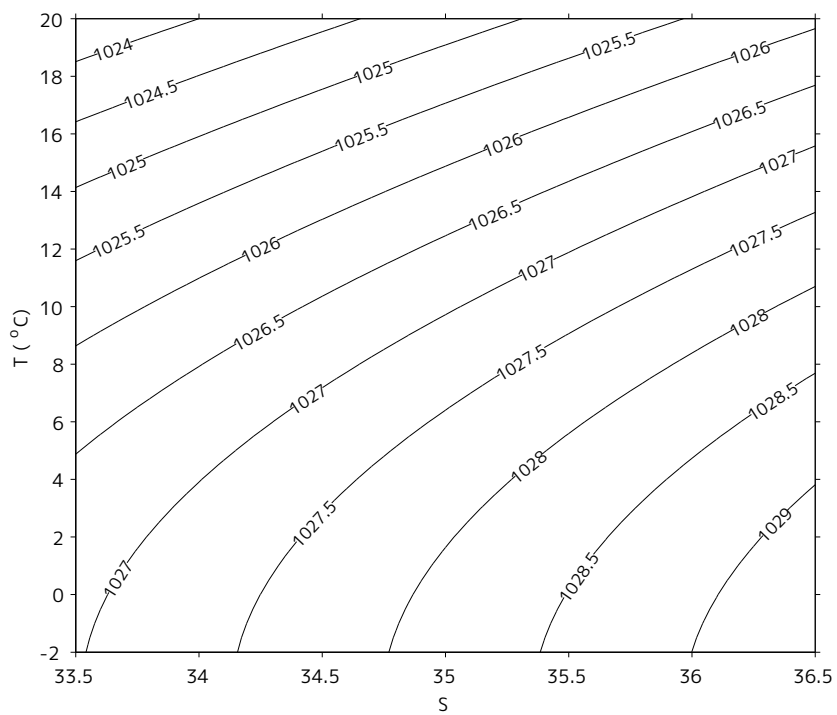


図 2: 水温 (T)・塩分 (S) と密度の関係図。等値線は海面に準拠した密度 (kg m^{-3}) を示す。

問題 9 : 選択問題・地球物理学

以下の 7 問の中から 2 つを選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

- (1) 東部赤道太平洋の冷水域とウォーカー循環との関係について説明せよ。
- (2) 潮位に見られる日潮不等とはどのような現象であるか、天体と地球の自転軸との関係の影響も含めて説明せよ。
- (3) インドモンスーンと日々の海陸風について、これらの形成要因として共通する点と異なる点をそれぞれ 1 つ挙げて説明せよ。
- (4) 海氷は海洋における淡水成分・塩分の輸送にどのような働きをするか、その塩分の輸送が海洋大循環に果たす役割を含めて説明せよ。
- (5) 上部成層圏から中間圏における地球規模の東西風は夏季と冬季でそれぞれどのように吹くか。その要因を含めて説明せよ。
- (6) ポテンシャル渦度とその保存について説明せよ。また、この性質をもちいて、地形性ロスビー波の位相の進む方向について説明せよ。
- (7) 検定済みの温度計を用いて地上における気温観測を実施する。正確な気温観測のために、温度計の設置に際してなすべきことを 3 点挙げ、その理由を説明せよ。