

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成23年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3~9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成22年8月

問題 1 : 必答問題

問 1 位置ベクトルを \boldsymbol{r} 、その大きさを $r = |\boldsymbol{r}|$ 、 n を自然数とすると、以下のものを r 、 n を使って表せ。

(a) ∇r

(b) $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$

(c) $\nabla \times \boldsymbol{r}$

(d) $\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^n}$

問 2 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

問 3 以下の初期値問題を解け。

(a) $\frac{dx}{dt} + x = 1, \quad x(0) = 0$

(b) $\frac{dx}{dt} + x = \sin t, \quad x(0) = 0$

問題 2 : 必答問題

問 1 床の上に置かれた高さ h 、質量 M の、図 1 に示されているような滑り台を考える。最高点 (A 点) から質量 m の質点を初速度ゼロで左側の斜面に沿って滑らせる。滑り台の傾斜は床に接するところではゼロであり、質点には摩擦は働かないとする。また、重力加速度を g とする。

(a) 滑り台を床に固定しておいたとき、滑り降りた後の質点の速さはいくらか。

(b) 床と滑り台の間には摩擦がなく、滑り台は床の上を自由に動けるとする。質点が滑り降りるに従って、滑り台は図の左右どちらに動くか、それとも動かないか。理由も述べよ。ただし、滑り台は初期には静止していたとする。

(c) (b) において質点が床に到達したとき、滑り台の動く速さはいくらになるか。

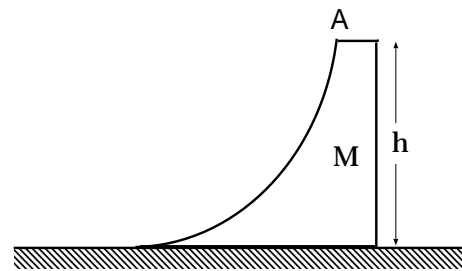


図 1

問 2 宇宙ステーション内に人工重力を作る方法としては、SF 映画に見られるような車輪型の宇宙ステーションを軸周りに回転させることにより生じる遠心力を用いるというものがある (図 2)。

(a) 軸から居住区の床までの距離を 40m としたとき、地球とほぼ同じ重力 (10m/s^2) を作るために必要な回転角速度はいくらか。

(b) この人工重力の下、床の上でじっとしている体重 50kg の人の持つ宇宙ステーションの回転軸周りの角運動量の大きさはいくらか。この人を居住区の床に置かれた 50kg の質点として計算せよ。

(c) (b) の人がまっすぐ上向きにジャンプした。床上の落下地点はジャンプした地点と同じか、それとも異なるか。異なる場合にはどちらの方向にずれるか (宇宙ステーションの回転方向か、それとも、その逆か)。また、その理由を述べよ。なお、「上」というのは人工重力と逆の方向である。

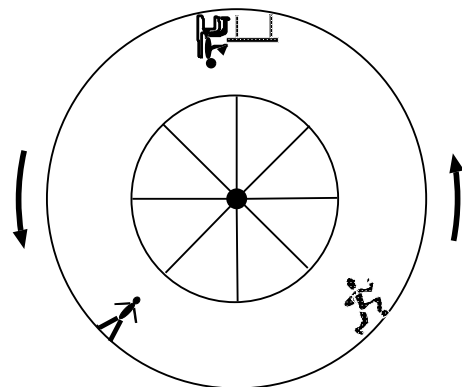


図 2

問 3 気温 300K の空気中で、1mol の理想気体を袋に入れ、湖に沈める。ただし、地表面での大気圧を $1000\text{hPa} = 10^5\text{N/m}^2$ 、水の密度を 1000kg/m^3 、重力加速度の大きさを 10m/s^2 、気体定数を $8.31\text{J}/[\text{mol}\cdot\text{K}]$ 、水温は、水深に関わらず気温と同じ 300K であり、さらに、袋の容量は 1000hPa 、300K での 1mol の理想気体の体積よりも大きいとする。有効数字 2 桁で答えよ。

- (a) 袋に入れられたこの気体の体積は、地表面では、いくらか。
- (b) 水深 90m での圧力はいくらか。なお、大気や水の中の圧力はその上にある空気や水に働く重力により決まるとしてよい。例えば、地表面での大気圧 10^5N/m^2 は、底面積 1m^2 の気柱 (空気の柱) の質量が 10^4kg であることを意味する。
- (c) 気体が入った袋を水深 90m まで沈めた。袋は熱を良く通し、気体の温度は水温と同じであるとする。気体の体積はいくらになるか。また、この過程で、気体はどれだけの熱を吸収、もしくは、放出したか。ただし、 $\log_e 10 \simeq 2.30$ を用いても良い。

問題 3 : 選択問題・数学

「半径 r の円内に任意の弦（円周上の 2 点を結んだ線分）を引くとき、その弦の長さが、その円に内接する正三角形の 1 辺の長さより長くなる確率を求めよ」

という問題があったとする。しかし、実際には、「任意の弦を引く」というだけではあいまいで、答えを一つに決めることができない。以下の問いに従って、3 つの異なる方法でこの問題の答えを求めよ。

- 問 1 対称性を考えれば、弦の方向は一定としてよいから、この円のある直径に垂直な弦を考える。この直径と弦との交点を、直径上の点に等確率でとるものとして、弦の長さが内接三角形の 1 辺の長さより長くなる確率を求めよ。
- 問 2 対称性を考えれば、弦の一端を円周上に固定して考えてよい。円周上に固定した点から引いた弦とこの点を通る円の接線とのなす角を等確率に選ぶものとして、弦の長さが内接三角形の 1 辺の長さより長くなる確率を求めよ。
- 問 3 弦を定めるには、まずその中点を与え、中点と円の中心とを結ぶ線に垂直に直線を引いて弦が得られる。このとき、円内に等確率で弦の中点を置くものとして、弦の長さが内接三角形の 1 辺の長さより長くなる確率を求めよ。

問題 4 : 選択問題・数学

関数 $f(t)$ に対して

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

が存在するとき、 $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換といい、 $L\{f\}$ で表す。ここで $s > 0$ である。例えば、

$$L\{1\} = \frac{1}{s}, \quad L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

である。以下の問いに答えよ。

問 1 $L\{e^{at}\}$ を求めよ。ただし、 $s > a$ とする。

問 2 $L\{\cos t\}$ を求めよ。

問 3 $L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$ であることを示せ。ここで、 $f' = \frac{df}{dt}$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$ である。

問 4 関数 $f(t)$ が、

$$f'' + 2f' + f = 1$$

を満たすとする。ここで、 $f'' = \frac{d^2 f}{dt^2}$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f'(t) = 0$ である。また、

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

とする。 $L\{f\}$ を求めよ。さらに、 $f(t)$ を求めよ。

問 5 関数 $f(t)$ 、 $g(t)$ 、 $h(t)$ に関して、 $L\{f\}L\{g\} = L\{h\}$ が成り立つとき、

$$h(t) = \int_0^t f(t-y)g(y) dy$$

となることを証明せよ。

問題 5 : 選択問題・物理

図 1 のように、自然長 l のばねの両端に質量 m_1, m_2 の質点 P, Q が結ばれ、水平方向に 1 次元運動する系を考える。質点 P, Q の位置は、それぞれ時間 t の関数 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) で表される。ばねを長さ l_0 まで一様に伸ばした状態で 2 つの質点を静止させておき、 $t = 0$ にこれらの質点を同時に放した。このとき以下の問に答えよ。ただし、ばねの力はフックの法則に従うものとし、ばね定数を k ($k > 0$) とする。また、ばねの質量は無視できるものとする。

問 1 $x_2 - x_1 > l$ の場合、質点 P にかかる水平方向の力の大きさと向きを答えよ。

問 2 質点 P, Q それぞれに対する水平方向の運動方程式を求めよ。

問 3 質量中心 (重心) の位置 x_G を、 m_1, m_2, x_1, x_2 を用いて表わせ。また、質量中心は $t > 0$ でも静止していることを示せ。

問 4 ばねの伸び $u = x_2 - x_1 - l$ を定義する。このとき、質点 P, Q の運動方程式から、 u に対する方程式を導け。

問 5 問 4 で求めた方程式を解き、 x_1, x_2 を求めよ。ただし、 $x_G = 0$ とする。

問 6 次に、重力加速度 g が鉛直にはたらく場の中で、質点 Q を固定し質点 P は鉛直にぶら下げて静止させておく (図 2)。 $t = 0$ で質点 Q を放して系を自由落下させた場合、 $t > 0$ におけるこの系の運動について運動方程式に基づき議論せよ。ここで、空気抵抗は無視できるものとする。



図 1

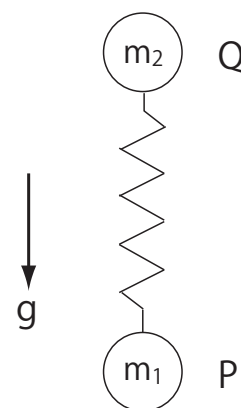


図 2

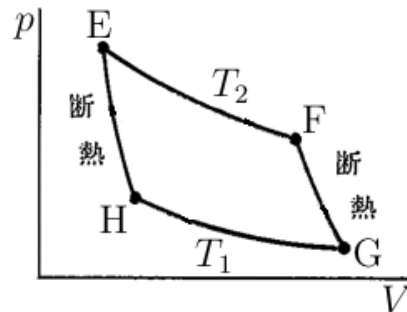
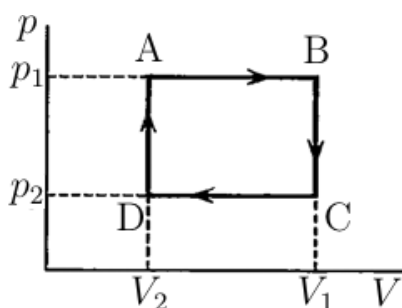
問題 6 : 選択問題・物理

気体の圧力 p と体積 V との関係を示す下の $p - V$ 図に関する以下の問に答えよ。

- 問 1 理想気体からなる系が、下図左のようなサイクル $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ を行った。この間に系が外部に対してなした仕事を求めよ。
- 問 2 理想気体からなる系を用い、温度 T_1, T_2 をもつ 2 つの熱源に接触させながら下図右に示す 4 つの状態 E, F, G, H を循環させることにより、低温熱源から高温熱源に熱を移すヒートポンプ式暖房機を作りたい。ただし、 $E-H$ 間と $F-G$ 間は断熱変化、 $E-F$ 間と $G-H$ 間は、それぞれ温度 T_2 と T_1 の等温変化である。このサイクルをどちら向きに回せばヒートポンプ式暖房機として機能するか。その理由も述べよ。
- 問 3 問 2 で設計した系を用いてヒートポンプ式暖房機を駆動するとき、系が低温熱源から得る熱量を Q_1 、系から高温熱源へ移される熱量を Q_2 とする。 E, F, G, H における系の体積を、それぞれ V_E, V_F, V_G, V_H とするとき、これらを用いた式で Q_1 と Q_2 を表せ。ただし、使用する気体の量を n モルとする。
- 問 4 理想気体が断熱変化するとき、温度 T と体積 V との間には $TV^{\gamma-1} = \text{一定}$ の関係が成り立つことが知られている。ここで、 γ は定圧比熱 c_p と定積比熱 c_v との比 c_p/c_v (比熱比) である。この関係式を利用することにより、問 3 で求めた Q_1 と Q_2 との間に次の関係式が成り立つことを示せ。

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

- 問 5 外気温が 0°C のとき、 1kW の電力を用いて 7°C の部屋を暖房する。ここで設計したヒートポンプ式暖房機により暖房するとすれば、最大で 1 秒あたり何ジュールの熱を部屋に供給することができるか。また、その結果を電熱線ストーブを用いた場合と比較せよ。



問題 7 : 選択問題・地球物理学

問 1 台風の中心の周りの風速は、おおよそ次の形で近似できる。

$$fv + \frac{v^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

ここで r は台風中心からの距離、 p は気圧、 ρ は密度、 f はコリオリパラメタ、 v は動径に垂直な速度成分(「接線風速」。反時計回りのとき正とする)である。以下の問に答えよ。

- (a) (1) 式の各項はどのような効果を表わすか、またこの式で表わされる平衡状態は何と呼ばれるか。
- (b) 実際には台風内では (1) 式の平衡からのずれがあり、風速の動径成分 u (中心から遠ざかるときの $u > 0$ とする) はゼロでない。台風における大気境界層内の u は正か負か。その要因は何か。また、その上の対流圏上部での u は正か負か。

問 2 温帯高低気圧の発達について、以下の問に答えよ。

- (a) 図 1 は、北半球で発達中の温帯高低気圧の東西-高度(気圧)断面の模式図である。図の概略を書き写して次を記号で書き込め: 等圧面上の高温偏差(記号 W)、低温偏差(同 C)、南風(同 ⊗)、北風(同 ⊙)。それぞれ 1 箇所でもよい。
- (b) 図の構造により高低気圧が時間とともに発達することを 100 字程度で説明せよ。

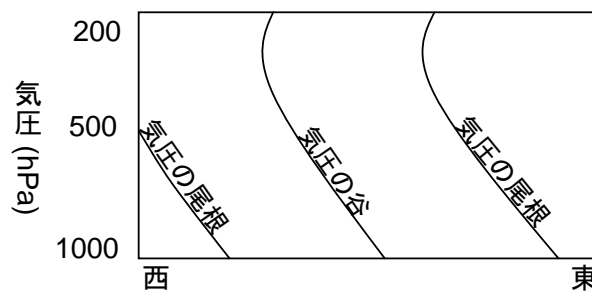


図 1

問 3 図 2 はある観測点での温位 θ (曲線 1)、相当温位 θ_e (同 2)、飽和相当温位 θ_e^* (同 3) の鉛直分布の観測結果の模式図である。図に関する次の文章中の A, B, D, E に当てはまる語を下記の選択肢より選び、C に当てはまる表現を 20 字程度で答えよ。

「地表付近の成層は静的に [A] である。高度 d は [B] と呼ばれる。地表付近の空気塊が周囲の空気と混合せず上昇してこの高度を超えると [C]。この空気塊がこの高度を超えても周囲と混合しなければ [D] は保存する。この空気塊が周囲と混合しつつ雲を形成すると、雲頂は高度 e [E] なる。」

- A: 安定, 中立, 不安定
B: 持ち上げ凝結高度, 境界層高度, 自由対流高度
D: θ , θ_e , θ_e^*
E: より高く, とほぼ等しく, より低く

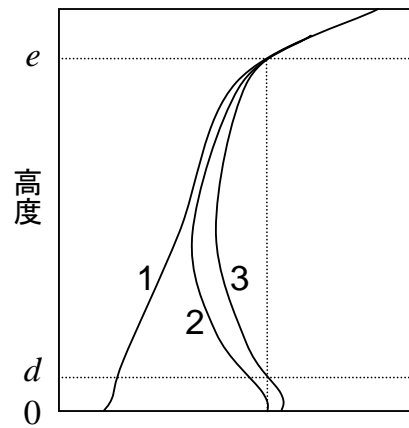
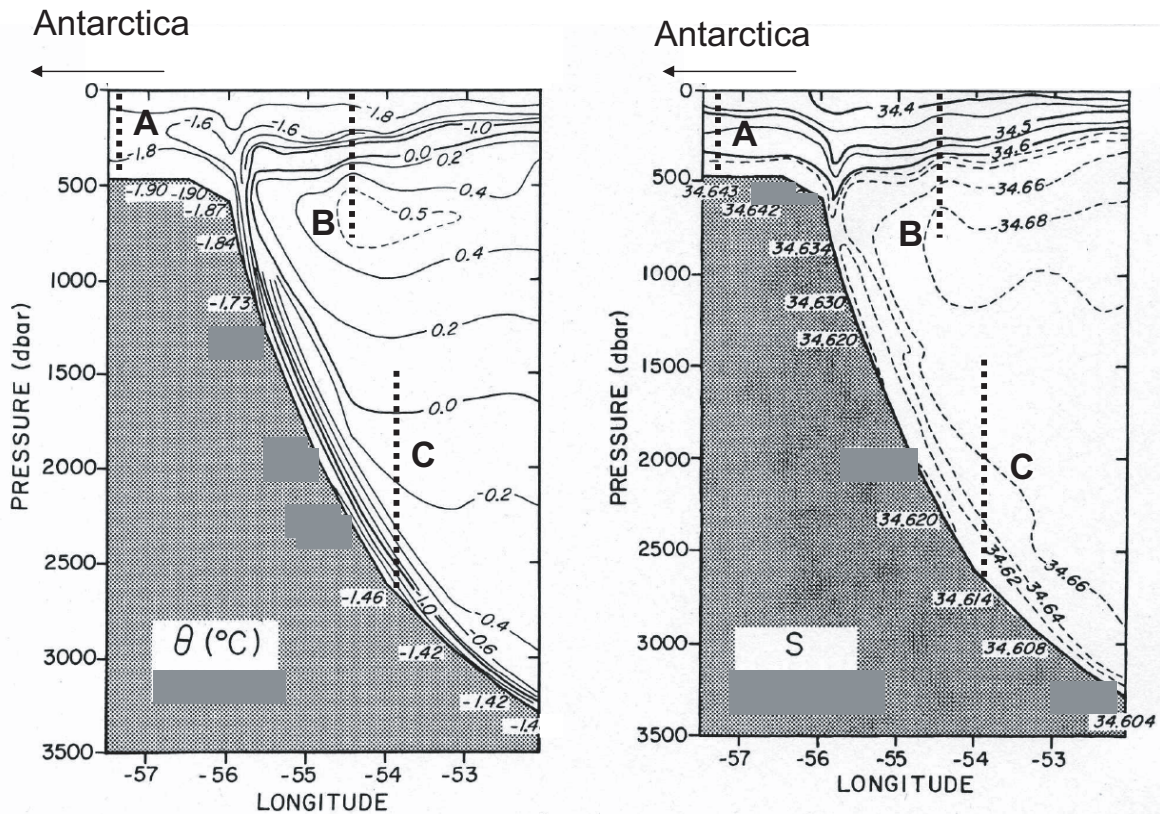


図 2

問題 8 : 選択問題・地球物理学

問 1 図 1 は、南極ウェッデル海の陸棚上から外洋域へかけての東西のラインにおいて、ある年の初冬に観測した水温 (ポテンシャル水温) と塩分の断面図である。図 1 をみて以下の問に答えよ。ただし、図の縦軸である圧力は概ね深さに対応し、1dbar \approx 1m であるとしてよい。



(Gordon 1998, Ant.Res.Ser., 75, 215-240)

図 1: 南極ウェッデル海における初冬のポテンシャル水温 (左) と塩分 (右) の断面図。縦軸は圧力、横軸は経度 (陸棚上から外洋域へかけての東西のラインなので) を示す。

- A での水温は鉛直的にほぼ一様な値を示している。この水温の値は何によって決まっているか?
- B では 0~200dbar には冷たい水が 700dbar 付近を中心に分布する暖かい水の上に位置しているが、密度成層は安定である。それはなぜか?
- C の底面付近に分布する水は主にどのような起源を持つ水であると考えられるか?
- C の底面付近の水の溶存酸素はその上方 (例えば 1500dbar 深) の水の溶存酸素と比べてどのような値を示すと考えられるか? その理由とともに述べよ。

問 2 海洋の低周波運動について、次のようなつりあいが成り立つ場合を考える。

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

また、密度の変化も十分小さく、質量の保存から次のような関係が成り立っていると考える。

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (3)$$

ここで f はコリオリ係数、 u, v, w はそれぞれ東西、南北、鉛直方向の流速、 ρ は海水の密度、 p は圧力を示し、 x 軸、 y 軸、 z 軸はそれぞれ東向き、北向き、鉛直上向きにとる。このような状況の下で以下の問に答えよ。

- (a) (1), (2) 式のような関係を何と呼ぶか?
- (b) (1), (2) 式から流速の水平成分の発散はどう書けるか? ここで $f = f_0 + \beta y$ (f_0, β は定数) と近似せよ。
- (c) 上記の結果と (3) 式から $\frac{\partial w}{\partial z}$ はどう書けるか?
- (d) 深層から表層へ向けて水がわきあがるとき、深層の水はどの方向に移動しようとするか? (c) で求めた関係に基づいて述べよ。ここで海底は平坦なものとする。
- (e) 上記のことから、南半球の深層循環の簡単なモデルとして最も適当なものは次のうちのどれか? 図 2 の (1)~(5) から選べ。

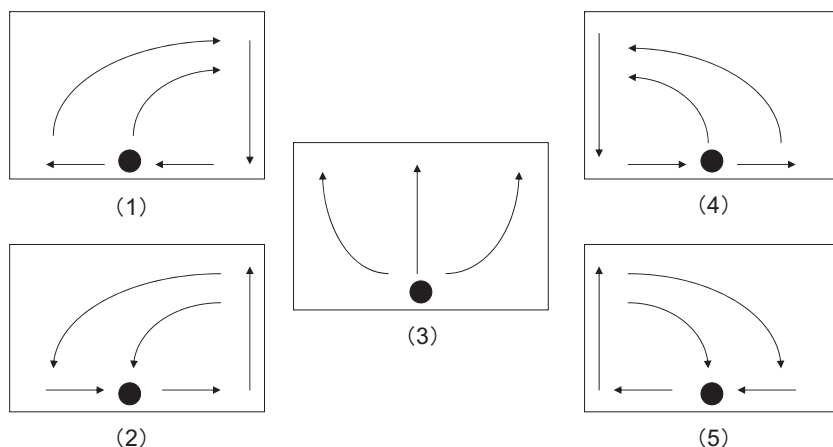


図 2: 南半球における深層循環の簡単なモデル。● は沈み込みの起きる場所を示し、矢印は深層水の動く向きをあらわす。図の上が赤道側で、下が極側をあらわす。

問題 9 : 選択問題・地球物理学

以下の問の中から 2 つ選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

- (1) 温室効果ガスの濃度増大により地表面付近の気温が上昇するメカニズムを説明せよ。
- (2) 湿潤断熱減率とは、どのような条件で導かれる気温減率（気温の高度勾配に -1 をかけたもの）か。対流圏の気温減率は湿潤断熱減率に近い。対流圏の広い高度範囲に渡る雲（積乱雲等）が地球上で占める面積の割合は小さいのに、なぜそのようなものか説明せよ。
- (3) 次にあげる大気のリモートセンシング手法より 2 つ選び、測定対象と測定原理を説明せよ（各 150 字程度）。ウィンドプロファイラー、降雨レーダー、ミーライダー、ラマンライダー、電波掩蔽法、ドブソン分光法。
- (4) 異なる水温と塩分特性をもつ海水どうしの混合過程には二重拡散対流と呼ばれる形態がある。海洋の二重拡散対流はなぜ起きるのか、どのような水温・塩分の条件に応じてどのように混合するか、その様子を述べよ。
- (5) カリフォルニアやペルーの沿岸海域などでは沖合いに比べて低温となっている。こうした現象がなぜ起こるのかについて述べよ。また沿岸海域以外で、これと同様な現象が起きる場所はどこか。またなぜそうなるのかについて述べよ。
- (6) 地球規模で平均した海水位は現在どのような要因でどのように変化していると考えられるか？ その要因を 2 種類に区別し、両者の重要性について述べよ。また、氷期 - 間氷期 といった時間スケールでの海水位変動についても議論せよ。