

北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座・気候モデリング講座・極域大気海洋学講座

平成 12 年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

必答問題 2 問は必ず解答すること。選択問題は、数学 2 問・物理学 2 問・地球物理学 3 問、計 7 問出題されている。その中から 2 問を選択し、解答すること。解答用紙には科目名と問題番号を記入すること。

平成 11 年 9 月

必答問題 I

問 1 次の不定積分並びに積分の微分を計算せよ。

$$(a) \quad \int x^3 e^x dx$$

$$(b) \quad \frac{d}{dt} \int_0^{t^2} e^{-x^2} dx$$

問 2 ベクトルと行列に関する以下のものを計算して求めよ。ただし、 \mathbf{r} は位置ベクトルであり、直交直線座標系におけるベクトルの各成分並びに行列 A は

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるとする。

$$(a) \quad \mathbf{b} \times \mathbf{r}$$

$$(b) \quad \nabla \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})$$

$$(c) \quad A\mathbf{r}$$

$$(d) \quad AA$$

$$(e) \quad A^{-1}$$

必答問題 II

問 1 以下の初期値問題を解け。ただし、 a は実定数。

$$(a) \quad \frac{dx}{dt} - ax^2 = 0, \quad x(0) = 1$$

$$(b) \quad \frac{dx}{dt} + ay = 0, \quad \frac{dy}{dt} - ax = 0, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1$$

問 2 質量の無視できる長さ l の棒の一方の端に棒と直交する回転軸を取りつけ、もう一方の端に質量 m の質点をつけた。この棒は回転軸に直交する面内で、回転軸を中心に自由に回転できる。なお、この系には重力等の外力は一切働いておらず、また、回転軸の位置は固定されているとする。

(a) この質点をつけた棒は回転軸まわりに角速度 ω_0 で回転していた。運動エネルギーを求めよ。

(b) 回転している途中で棒がゆっくりと伸び、棒の長さが 2 倍になった。角速度はいくらになったか。また、運動エネルギーはいくらになったか。

(c) 棒の長さが 2 倍に伸びる際には運動エネルギーも変化する。運動エネルギーの変化は力が質点になした仕事に等しい。この変化を引き起した仕事について説明せよ。

選択問題：数学・問題 I

ある年、急にダイエットが流行り出した。そこで、ダイエットを行っている人の人口の推移を毎年一回調べたところ、一年経つと、いつも前の年にダイエットをしていた人のうち、人口比で a ($a < 1$) の人がダイエットを続け、前の年にダイエットをしていなかった人のうち、人口比で b ($b < 1$) の人が思い立って、ダイエットを始めることがわかった。以下の問に答よ。但し、死亡や出生は考えないと仮定する。

問 1 ある年のダイエット人口、非ダイエット人口を x_0, y_0 とし、1 年後におけるそれぞれの人口 x_1, y_1 を表わす式を

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

と書くとき、行列 T を具体的に書け。

問 2 行列 T の固有値と固有ベクトルを求めよ。

問 3 n 年後のダイエット人口 x_n , 非ダイエット人口 y_n を求めよ。さらに、 n が十分大きい場合における x_n と y_n の値を求め、ダイエット人口と非ダイエット人口の比率を求めよ。

選択問題：数学・問題 II

長さ 1 の線分上に 2 点 A , B をとる。この時、点は線分上均一の確率でとるものとする。

問 1 A , B の距離が 0 と 1 の間の数 x より小さい確率を求めよ。

問 2 A , B の距離の期待値を示せ。

問 3 同様に長さ 1 の線分上に 4 点 A , B , C , D をとるとき、 C , D の 2 点がともに A , B の間にある確率を求めよ。

選択問題：物理・問題 I

位置や運動量のような物理量は量子論では演算子として考える (運動量 p は $-i\hbar\nabla$ である)。角運動量に関する以下の問に答えよ。

- 問 1 軌道角運動量演算子 $\ell = (\ell_x, \ell_y, \ell_z)$ において、 ℓ_x の直交座標系での具体的な形を示せ。
- 問 2 軌道角運動量演算子 $\ell = (\ell_x, \ell_y, \ell_z)$ に関する交換関係、 $[\ell_x, \ell_y]$ 及び $[\ell^2, \ell_z]$ を求め、その意味を述べよ。
- 問 3 中心力場での質量 m の物体の運動を記述するハミルトニアンを H とするとき、 $[\ell^2, H] = 0$ 及び $[\ell_z, H] = 0$ を示し、その意味を述べよ。

選択問題：物理・問題 II

地球の北極から赤道の地表面へまっすぐにトンネルを掘ったとする。トンネルの壁はなめらかで摩擦は無視できるとして、北極から質量 $1kg$ の物体を静かに放すとどのような運動をするか、論ぜよ。また、トンネルの中央に達するまでの時間及びそこでの物体の速さを有効数字 1 桁で求めよ。

ただし、地球は密度一定で半径 (R) $6400km$ の球とし、地球の回転及び空気の抵抗は無視する。また、万有引力定数 G は $6.7 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$ 、地球表面での重力加速度 g は $9.8ms^{-2}$ 、地球の密度 ρ は $5.5 \times 10^3 kgm^{-3}$ とする。

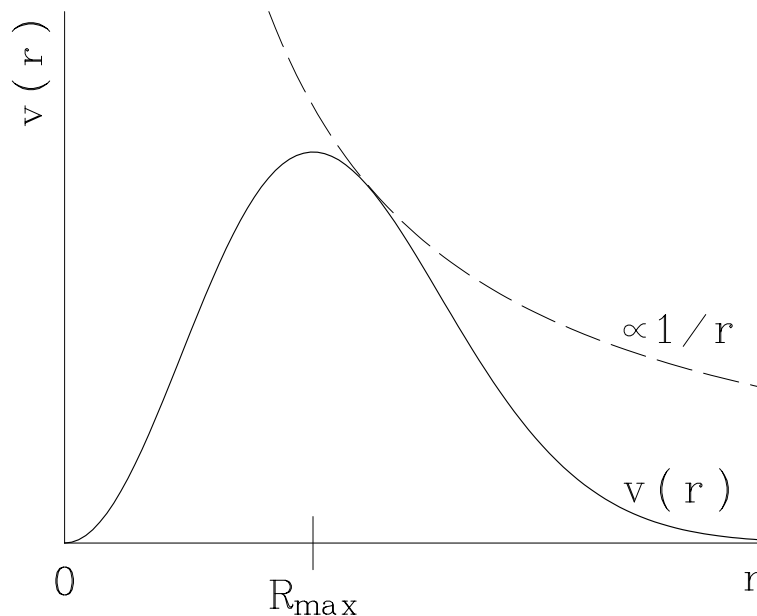
選択問題：地球物理学・問題 I

次の 4 問の中から 2 つを選んで答えよ。

- (1) CFC (フロン) は主に北半球の国から放出されているのに、なぜ南極の春に顕著なオゾンホールがあらわれたのだろうか、議論せよ。
- (2) なぜ温帯低気圧のような構造を持つ低気圧は熱帯域で発達しないのか。その理由について、温帯低気圧の構造、成因および、熱帯域での大気大循環場の特徴の観点より議論せよ。
- (3) オホーツク海は大規模に海氷が発達する海域としては比較的低緯度に位置する。なぜ、このような低緯度で海氷が発達するのか、議論せよ。
- (4) 西部赤道太平洋の水温は海面では 28°C 以上あるが、400 m より深いところでは 10°C 以下の低温である。赤道なのに、なぜこのように水温が低い状態が維持されているのか、議論せよ。

選択問題：地球物理学・問題 II

回転対称な渦で理想化した「台風」について考える。渦の空間スケールは実際の台風と同じであり、渦は対流圏の亜熱帯域に存在すると考える。さらに、自由大気下層において、渦の接線方向の風速分布 $v(r)$ が、以下の図の実線で与えられていると仮定する。ここで、 r は渦の中心からの距離である。また、 R_{\max} は、 $v(r)$ が最大となる r を意味し、破線は $1/r$ に比例する曲線で、 $v(r)$ に接するものを示す。



- 問 1 自由大気下層において、この渦に伴う渦度の動径方向の分布を定性的に図示せよ。特に、渦度が極値をとる位置と、0 になる位置を R_{\max} と関係づけて明示せよ。
- 問 2 大気境界層での動径方向の流れと、大気境界層上端における鉛直流の動径方向の分布を定性的に図示せよ。特に、それらの値が極値をとる位置を R_{\max} と関係づけて明示せよ。
- 問 3 渦度の時間変化の観点から、この渦が発達するためにはどのような運動が必要か議論せよ。さらに、この運動を維持するためには、どのような現象が必要かを述べよ。

選択問題：地球物理学・問題 III

下の図は海洋を単純に模式化したものである。北半球にあり、 β は一定、水深も一定、密度成層は無いとして、海流がどの様になるか、流線関数の概要を図示せよ。但し、斜線部では風応力の回転が正、点彩の部分では負である。

