

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和6年度大学院修士課程秋季特別入試
基礎学力試験

数学・物理学(古典物理学)より計2問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和5年11月

問題 1

問 1 以下の不定積分を求めよ。

$$\int (\log x)^2 dx$$

問 2 以下の微分方程式を解け。

(a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x}$$

(b)
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$$

問 3 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

問 4 3次元空間における位置ベクトルを \mathbf{r} 、任意の定ベクトルを \mathbf{a} とするとき、次を求めよ。

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$$

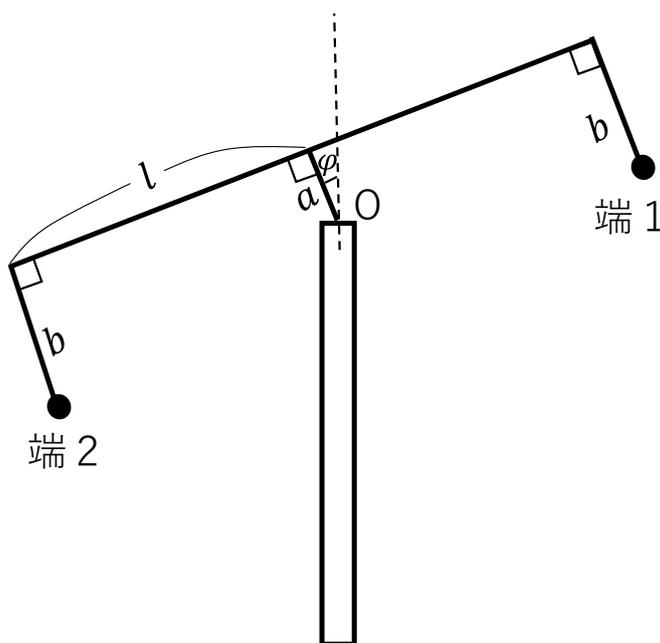
問 5 自然対数の底 e と虚数単位 i を用いて $\sin x$ と $\cos x$ を表せ。また、その結果を用いて以下の恒等式が成立することを示せ。

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

問題2

問1 図のようなやじろべえについて考える。長さ $2l$ の棒の両端に長さ b の棒が直角に取り付けられ、それぞれの先端に質量 m の質点がつけられており、それが長さ a の支持棒によって支点 O で支えられている。ここで、 $b > a$ である。このやじろべえを傾け、その後離すと振動した。このとき以下の問に答えよ。ただし、棒の質量は無視できるとする。また、やじろべえは支点を中心に同一面内で振動するものとする。支点における摩擦はない。重力は鉛直下向きで、その大きさは g である。

- (a) 支持棒と鉛直のなす角度を φ とし、やじろべえの振動の角速度を $d\varphi/dt$ と書くとき、端1の質点の支点 O 周りの角運動量を求めよ。ここで、 t は時間である。
- (b) やじろべえの重心に働く重力による支点 O 周りのモーメントの大きさを求めよ。
- (c) φ の時間変化を表す方程式を導け。
- (d) やじろべえの振動の周期を求めよ。ただし φ は小さいとし、 $\sin \varphi \approx \varphi$ と近似してよい。



図

問2 ある火力発電所では、石油を燃焼させて高温の水蒸気を作り、タービンを回転させることによって、100万kWの電力を発生させている。

- (a) 放水量が1秒あたり 500 m^3 で発電効率80%の水力発電所を作るとする。上述の火力発電所と同じ発電量を得るには、落差はいくら必要か。有効数字2桁で答えよ。水の密度を $1.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 、重力加速度を 10 m s^{-2} とせよ。

- (b) 太陽からの放射エネルギーのうち地表に到達する量は、全球平均、一年平均でおよそ 160 W m^{-2} である。ある太陽光パネルのエネルギー変換効率が 20% とすると、太陽放射エネルギー 160 W m^{-2} から上述の火力発電所と同じ発電量を得るにはどれだけの面積の太陽光パネルが必要か。有効数字 2 桁で答えよ。

問 3 -10°C の氷 1.0 kg を 20°C の水にするのに要する熱量を有効数字 2 桁で求めよ。ただし、水の比熱を $4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 、氷の比熱を $2.1 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 、氷の融解熱を $3.3 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$ とせよ。